EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Puisque H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$ et que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Par suite,

$$\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \|\overrightarrow{n}\| \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

2) Puisque le point H appartient au plan $\mathscr{P}$, on a $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ et donc $ax_H + by_H + cz_H = -d$ puis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_0H} &= a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 + ax_H + by_H + cz_H \\ &= -ax_0 - by_0 - cz_0 - d.\end{aligned}$$

3) D'après les deux questions précédentes, $|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = d\,(M_0, \mathscr{P})\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et, puisque

$$|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = |-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|,$$

on a montré que

$$\boxed{d\,(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

Partie B

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-7, 1-5)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3, 2, 1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a d'une part $-3 = -7k$ et donc $k = \dfrac{3}{7}$ et d'autre part, $2 = 1 \times k$ et donc $k = 2$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les point A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

On note $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

- $x_A + 2y_A - z_A - 1 = 4 + 2 - 5 - 1 = 0$. Donc A appartient à $\mathscr{P}'$.
- $x_B + 2y_B - z_B - 1 = -3 + 4 - 0 - 1 = 0$. Donc B appartient à $\mathscr{P}'$.
- $x_C + 2y_C - z_C - 1 = 1 + 6 - 6 - 1 = 0$. Donc C appartient à $\mathscr{P}'$.

On en déduit que le plan (ABC) est le plan $\mathscr{P}'$ ou encore qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + 2y - z - 1 = 0$.

b) $d = \dfrac{|x_F + 2y_F - z_F - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-7 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$

$$\boxed{d = 2\sqrt{6}.}$$

2) a) Δ est la droite passant par $F(-7, 0, 4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$. Donc, une représentation paramétrique de Δ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Le point H est l'intersection de Δ et de $\mathscr{P}$. Soit $M(-7 + t, 2t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (-7 + t) + 2(2t) - (4 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Pour $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H : $(-5, 4, 2)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (-5, 4, 2).}$$

c) $d\,(F, \mathscr{P}) = FH = \sqrt{(-5 - (-7))^2 + (4 - 0)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 2)b).

3) a) $FB^2 = (x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2 + (z_B - z_F)^2 = (-3 - (-7))^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 16 + 4 + 16 = 36$ et donc $FB = 6$.

$$\boxed{\text{Le point } \mathsf{B} \text{ appartient à } \mathscr{S}.}$$

b) On note R le rayon de $\mathscr{S}$ (donc $\mathsf{R} = 6$). Puisque $\mathsf{d} = 2\sqrt{6} = 4,8\ldots$, on a $\mathsf{d} < \mathsf{R}$ et on sait que l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - 24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Le centre de $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal du centre F de la sphère $\mathscr{S}$ sur le plan $\mathscr{P}$. C'est le point $\mathsf{H}(-5, 4, 2)$ déterminé à la question 2)b).

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est un cercle de rayon } 2\sqrt{3} \text{ et de centre } \mathsf{H}(-5, 4, 2).}$$

