

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par \mathcal{P} le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan \mathcal{P} .

On suppose connue la propriété suivante.

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan \mathcal{P} , c'est-à-dire la distance M_0H , est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4, 1, 5), (-3, 2, 0), (1, 3, 6), (-7, 0, 4)$.

1.
 - a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan \mathcal{P} et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.
 - b. Déterminer la distance d du point F au plan \mathcal{P} .
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - b. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point F sur le plan \mathcal{P} .
 - c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit \mathcal{S} la sphère de centre F et de rayon 6.
 - a. Justifier que le point B appartient à la sphère \mathcal{S} .
 - b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle \mathcal{C} , intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} .