EXERCICE 3

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg(z)\ [2\pi],$$

et donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

PARTIE B

1) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_A = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

$$\boxed{|z_A| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].}$$

2) a)

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i+i-1}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

b) Donc,

$$\frac{z_B}{z_A} = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\pi/3}.$$

c) Puis, d'après la question 1),

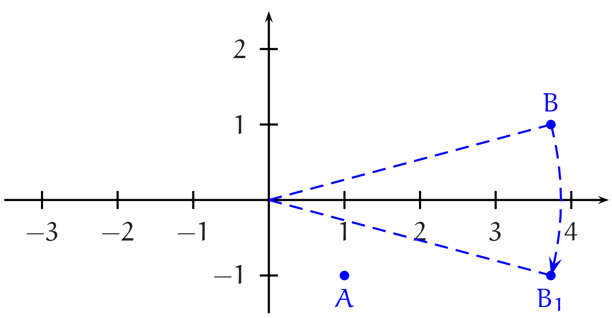
$$z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\pi/3}z_A = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\pi/3} \times \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\pi/12}.$$

$$\boxed{z_B = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\pi/12}.}$$

3) a) $z_{B_1} = e^{-i\pi/6}z_B = e^{-i\pi/6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\pi/12} = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{-i\pi/12}$.

b) $z_{B_1} = \overline{\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\pi/12}\right)} = \overline{z_B}$ et donc

$$\boxed{B_1 \text{ est le symétrique de B par rapport à l'axe } (O; \vec{u}).}$$



4) a) On note s la symétrie par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$

D'après la question 3)b), le point B appartient à (E). D'autre part, $O_1 = r(O) = O$ puis $O' = s(O_1) = s(O) = O$. Donc les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b) $z_1 = e^{-i\pi/6} z = e^{-i\pi/6} \times \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$ puis

$$z' = \overline{z_1} = \overline{\left(\rho e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}\right)} = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}.$$

Soit M un point du plan distinct de O, d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} = e^{i\theta} \text{ (car } \rho \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{6} - \theta + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

c) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{12}\ [\pi]\right) \Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}\right)\ [\pi]\right) \\ &\Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right) = 0\ [\pi]\right) \\ &\Leftrightarrow O,\ B \text{ et } M \text{ alignés} \Leftrightarrow M \in (OB). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } (E) \text{ est la droite } (OB).}$$