EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z.
On admet l'égalité $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Partie B Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}.$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2+i$.

(a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en **annexe**.

(b) Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

(c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en **annexe** l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

5. On a placé un point D sur la figure donnée en **annexe**. Construire son image D' par la transformation f.

EXERCICE 4

Partie A

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On sait que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et donc

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{(z_1 z_2)} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

En résumé, $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Puisqu'un module est un réel positif, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité précédente, on obtient $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tous nombres complexes } z_1 \text{ et } z_2,\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|.}$$

Partie B

1) (a)

$$\begin{aligned} z_{C'} &= \frac{1 - z_C}{\overline{z_C} - 1} = \frac{1 - (-2 + i)}{(-2 - i) - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} \\ &= \frac{-9 + 6i + 1}{(-3)^2 + (-1)^2} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{C'} = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

(Voir figure page suivante)

(b) $OC' = |z_{C'}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{1} = 1$. Donc

$$\boxed{\text{le point } C' \text{ appartient au cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.}$$

(c) Le point A a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(-2, 1)$ et le point C' a pour coordonnées $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

On en déduit que $\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires. Ceci montre que

$$\boxed{\text{les points } A,\ C \text{ et } C' \text{ sont alignés.}}$$

2) Soit M un point du plan distinct de A. On note z son affixe (z est donc un nombre complexe distinct de 1). Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

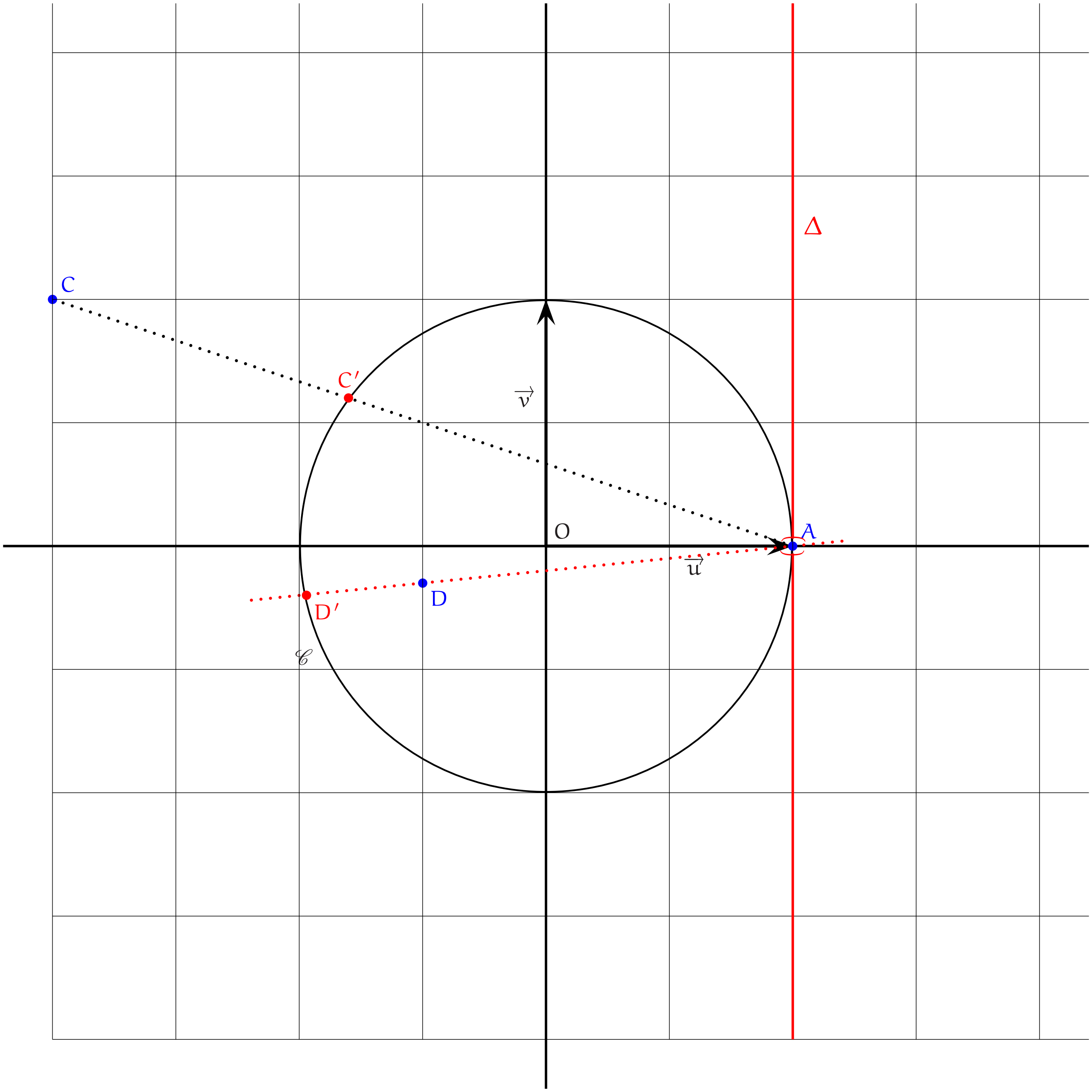
$$\begin{aligned} f(M) = A &\Leftrightarrow \frac{1 - z}{\overline{z} - 1} = 1 \Leftrightarrow 1 - z = \overline{z} - 1 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow z + \overline{z} = 2 \text{ (et } z \neq 1) \\ &\Leftrightarrow x + iy + x - iy = 2 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (et } (x, y) \neq (1, 0)) \end{aligned}$$

L'ensemble Δ est la droite d'équation $x = 1$ privée du point A.

3) Soit M un point du plan distinct de A dont l'affixe est notée z.

$$OM' = |z'| = \frac{|1 - z|}{|\overline{z} - 1|} = \frac{|-(z - 1)|}{|\overline{z - 1}|} = \frac{|z - 1|}{|z - 1|} = 1.$$

Donc M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ou encore M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.



4) Soit z un nombre complexe distinct de 1. Posons $z = x + iy$ ou x et y sont deux réels tels que $(x, y) \neq (1, 0)$.

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{\dfrac{1-z}{\overline{z}-1} - 1}{z-1} = \left(\frac{1-z}{\overline{z}-1} - 1\right) \times \frac{1}{z-1} = \frac{(1-z)-(\overline{z}-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{2-z-\overline{z}}{(z-1)\overline{(z-1)}}$$
$$= \frac{2-(x+iy)-(x-iy)}{|z-1|^2} = \frac{2-2x}{|z-1|^2}.$$

Le nombre $\dfrac{2-2x}{|z-1|^2}$ est un nombre réel et donc le nombre $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel. Notons k ce nombre réel.

$$\frac{z'-1}{z-1} = k \Rightarrow z'-1 = k(z-1) \Rightarrow z_{\overrightarrow{AM'}} = kz_{\overrightarrow{AM}} \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ou encore les points A, M et M' sont alignés.

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A, \text{ le point } M' \text{ appartient à la droite } (AM).}$$

5) D'après la question 3), le point D' appartient au cercle $\mathscr{C}$. D'après la question 4), le point D' appartient à la droite (AD) et d'après la question 2), le point D' n'est pas le point A puisque le point D n'appartient pas à Δ. D' est donc le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point A. Voir figure page précédente.

