

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que \bar{z} est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z .
On admet l'égalité $|z|^2 = z\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Partie B Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 .

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}.$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.
 - (a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f , et placer les points C et C' dans le repère donné en **annexe**.
 - (b) Montrer que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.
 - (c) Montrer que les points A , C et C' sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en **annexe** l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f .
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A , le point M' appartient au cercle \mathcal{C} .
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.
Que peut-on en déduire pour les points A , M et M' ?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en **annexe**. Construire son image D' par la transformation f .