EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

   Montrer que la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b) En déduire le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).

   d) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

3) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de (C) et (D).

   a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

   b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 2

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour $x > 0$, on pose $t = \ln(x)$ ou encore $x = e^t$ de sorte que x tend vers $+\infty$ si et seulement si t tend vers $+\infty$. On obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(e^t\right)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0,$$

car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Partie B

1) Soit $x \geqslant 1$. Alors, $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$ puis $g(x) \geqslant 0$.

2) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Mais alors la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Pour tout $x \geqslant 1$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Le signe de la fonction g a été étudié à la question 1) et on en déduit que la fonction f' est positive sur $[1, +\infty[$ puis que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

c) Pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } +\infty.}$$

d) Soit $x \geqslant 1$. Soient M le point de (C) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x.

$$y_M - y_N = f(x) - x = \left(x - \frac{\ln(x)}{x}\right) - x = -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Puisque $x \geqslant 1$, $y_M - y_N$ est du signe de $-\ln(x)$. Par suite, pour tout $x > 1$, $y_M - y_N < 0$ et pour $x = 1$, $y_M - y_N = 0$. Ainsi, (C) est strictement au-dessous de (D) sur $]1, +\infty[$ et (C) et (D) se coupent au point de coordonnées $(1, 1)$.

3) a) Soit $k \geqslant 2$.

$$M_kN_k = \sqrt{\left(x_{N_k} - x_{M_k}\right)^2 + \left(y_{N_k} - y_{M_k}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\ln k}{k}\right)^2} = \left|\frac{\ln(k)}{k}\right| = \frac{\ln(k)}{k} \text{ (car } k \geqslant 2).$$

b) Algorithme.

Variables	k est une variable du type entier
Initialisation	$k := 2$
Traitement	Tant que $\ln(k)/k > 10^{-2}$,
	Début du tant que
	Ajouter 1 à k
	FinTantQue
Sortie	Afficher k.

