

## EXERCICE 2

### Partie A. Restitution organisée de connaissances

Pour  $x > 0$ , on pose  $t = \ln(x)$  ou encore  $x = e^t$  de sorte que  $x$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si  $t$  tend vers  $+\infty$ . On obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0,$$

car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .

### Partie B

1) Soit  $x \geq 1$ . Alors,  $x^2 - 1 \geq 0$  et  $\ln(x) \geq 0$  puis  $g(x) \geq 0$ .

2) a) La fonction  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  en tant que quotient de fonctions dérivables sur  $]1, +\infty[$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $]1, +\infty[$ . Mais alors la fonction  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  en tant que différence de deux fonctions dérivables sur  $]1, +\infty[$  et pour  $x \geq 1$ ,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Pour tout  $x \geq 1$ ,  $x^2 > 0$  et donc  $f'(x)$  est du signe de  $g(x)$ . Le signe de la fonction  $g$  a été étudié à la question 1) et on en déduit que la fonction  $f'$  est positive sur  $]1, +\infty[$  puis que

la fonction  $f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$ .

c) Pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ . On en déduit que

la droite (D) d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe (C) en  $+\infty$ .

d) Soit  $x \geq 1$ . Soient  $M$  le point de (C) d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de (D) de même abscisse  $x$ .

$$y_M - y_N = f(x) - x = \left(x - \frac{\ln(x)}{x}\right) - x = -\frac{\ln(x)}{x}.$$

Puisque  $x \geq 1$ ,  $y_M - y_N$  est du signe de  $-\ln(x)$ . Par suite, pour tout  $x > 1$ ,  $y_M - y_N < 0$  et pour  $x = 1$ ,  $y_M - y_N = 0$ . Ainsi, (C) est strictement au-dessous de (D) sur  $]1, +\infty[$  et (C) et (D) se coupent au point de coordonnées (1, 1).

3) a) Soit  $k \geq 2$ .

$$M_k N_k = \sqrt{(x_{N_k} - x_{M_k})^2 + (y_{N_k} - y_{M_k})^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\ln k}{k}\right)^2} = \left|\frac{\ln(k)}{k}\right| = \frac{\ln(k)}{k} \text{ (car } k \geq 2\text{)}.$$

b) Algorithme.

Variables		$k$ est une variable du type entier
Initialisation		$k := 2$
Traitement		Tant que $\ln(k)/k > 10^{-2}$ , Début du tant que Ajouter 1 à $k$ FinTantQue
Sortie		Afficher $k$ .