Démonstrations exigibles au bac

On donne ici les 11 démonstrations de cours répertoriées comme exigibles dans le programme officiel. Toutes ces démonstrations peuvent donner lieu à une « restitution organisée de connaissances ».

I - Suites

Enoncé I-1.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration.

Il s'agit de montrer que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$, avec A réel, contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Soient A un réel puis $I =]A, +\infty[$.
Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.
D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Donc il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, u_n appartient à l'intervalle I.

Soit N le plus grand des deux entiers n_0 et n_1.

Soit $n \geqslant N$. Puisque $n \geqslant N$, on a $n \geqslant n_0$ et donc $v_n \geqslant u_n$. Puisque $n \geqslant N$, on a $n \geqslant n_1$ et donc u_n appartient à I ou encore $u_n > A$.

Mais alors, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $v_n \geqslant u_n > A$ et donc v_n appartient à l'intervalle I. Ainsi, tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans I à partir du rang N.

On a montré que tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Enoncé I-2. **(inégalité de Bernoulli)**

Soit a un réel positif.

Montrer que : pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Démonstration.

Soit a un réel positif. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Comme $1 \geqslant 1$, l'inégalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ et montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$.

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a) \\
&\geqslant (1+na)(1+a) \text{ (par hypothèse de récurrence et car } 1+a \geqslant 0) \\
&= 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \\
&\geqslant 1 + (n+1)a \text{ (car } na^2 \geqslant 0).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Enoncé I-3.

Soit q un réel strictement plus grand que 1.

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Pré-requis. On suppose connu les résultats suivants

- (l'inégalité de BERNOULLI :) pour tout réel positif a et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
- si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n$ et d'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration.

Soit q un réel strictement plus grand que 1. Posons $a = q - 1$ de sorte que a est un réel strictement positif et que $q = 1 + a$.

Montrons alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

D'après le premier prérequis, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ou encore $q^n \geqslant 1+na$. Puisque $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+an) = +\infty$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $q^n \geqslant 1+na$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+na) = +\infty$. D'après le deuxième pré-requis, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

II - Fonction exponentielle

Enoncé II-1.

Pré-requis. On suppose connu le fait qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$. On veut montrer que $g = f$ (et donc la fonction f est unique).

1) Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x)f(-x)$. Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel x, on pose $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Montrer que la fonction k est constante sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g = f$.

Démonstration.

1) Pour tout réel x, posons $h(x) = f(x)f(-x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (f(-x))' = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-x)' \times f'(-x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \text{ (car } f' = f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$ et donc h est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x,

$$h(x) = h(0) = (f(0))^2 = 1.$$

On a montré que pour tout réel x, on a $f(x) \times f(-x) = 1$.

En particulier, la fonction f ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$ car s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x_0) \times f(-x_0) = 0 \neq 1$.

2) Pour tout réel x, posons $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0.$$

La dérivée de k est nulle et donc k est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x,

$$k(x) = k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ ou encore, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$. On a montré que $g = f$.

Enoncé II-2.

Montrer que :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (Indication. En étudiant la fonction $f\ :\ x \mapsto e^x - x$ sur $[0, +\infty[$, montrer que pour tout réel positif x, on a $e^x \geqslant x$).

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Démonstration.

1) Pour tout réel x positif, posons $f(x) = e^x - x$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = e^x - 1.$$

On sait que pour tout réel positif x, $e^x \geqslant 1$ et donc la fonction f' est positive sur $[0, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$, pour tout réel positif x, on a $f(x) \geqslant f(0)$ ou encore $f(x) \geqslant 1$.
En particulier, pour tout réel positif x, $f(x) \geqslant 0$ ou encore $e^x - x \geqslant 0$ ou enfin $e^x \geqslant x$.
Ainsi, pour tout réel positif x, $e^x \geqslant x$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2) Puisque $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, on a encore $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$. En posant $X = -x$, on obtient alors

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0.$$

III - Géométrie dans l'espace

Enoncé III-1.

Montrer qu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Pré-requis. On suppose connu la définition de l'othogonalité d'une droite et d'un plan : une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Démonstration.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. Puisque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Soit Δ une droite de l'espace. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de la droite Δ.

• Si la droite Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$ et en particulier Δ est orthogonale aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

• Réciproquement, supposons que la droite Δ soit orthogonale aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Soit $\mathscr{D}''$ une droite du plan $\mathscr{P}$ de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{u}''$.
Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et que $\overrightarrow{u}''$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$, on sait qu'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{u''} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u'}.$$

Puisque la droite Δ est orthogonale aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u'}.\overrightarrow{v} = 0$. Mais alors

$$\overrightarrow{u}''.\overrightarrow{v} = \left(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u'}\right).\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\,\overrightarrow{u'}.\overrightarrow{v} = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, un vecteur directeur de la droite Δ est orthogonal à un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}''$ et donc la droite Δ est orthogonale à la droite $\mathscr{D}''$.

On a montré que la droite Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$ et donc que la droite Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Enoncé III-2.

Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls.

Démonstration.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

• Soit $\mathscr{P}$ un plan. Montrons que $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c sont trois nombres réels non tous nuls.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas nul et donc l'un au moins des trois réels a ou b ou c n'est pas nul.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0. \end{aligned}$$

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$, on obtient une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont trois réels non tous nuls.

• Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ l'ensemble d'équation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. Montrons que $\mathscr{P}$ est un plan.
Si $a \neq 0$, le point de coordonnées $\left(-\dfrac{d}{a}, 0, 0\right)$ appartient à $\mathscr{P}$, si $b \neq 0$, le point de coordonnées $\left(0, -\dfrac{d}{b}, 0\right)$ appartient à $\mathscr{P}$ et si $c \neq 0$, le point de coordonnées $\left(0, 0, -\dfrac{d}{c}\right)$ appartient à $\mathscr{P}$.

Dans tous les cas, l'ensemble $\mathscr{P}$ n'est pas vide. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{P}$ et soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur (a, b, c). Puisque l'un au moins des trois réels a ou b ou c n'est pas nul, le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est pas nul.
D'autre part, $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ et donc $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathscr{P}$ est la plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et en particulier que $\mathscr{P}$ est un plan.

IV - Probabilités

Enoncé IV-1.

Soient A et B deux événements indépendants.

Montrer que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration.

Puisque les événements A et B sont indépendants, on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

D'après la formule des probabilités totales, $p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$ et donc

$$p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A) \times (1 - p(B)) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right).$$

On a montré que $p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right)$ et donc les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Enoncé IV-2.

1) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$.

2) Montrer que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

Pré-requis. L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

Démonstration.

1) Pour tout réel positif x,

$$g'(x) = -e^{-\lambda x} + \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) \times \left(-\lambda e^{-\lambda x}\right) = -e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} = \lambda x e^{-\lambda x}.$$

Donc, une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \lambda x e^{-\lambda x}$ est la fonction $x \mapsto \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$.

2) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned} \int_0^t x \times \lambda e^{-\lambda x}\, dx &= \left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) e^0 \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - t e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout réel positif t, $-te^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda} \times \left(-\lambda t e^{-\lambda t}\right)$ et donc, en posant $u = -\lambda t$ et en tenant compte de $\lambda > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} -te^{-\lambda t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \times \left(-\lambda t e^{-\lambda t}\right) = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{\lambda} \times (ue^u) = 0$$

d'après un théorème de croissances comparées.

D'autre part, $\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} = \lim_{u\to-\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{u} = 0$. Finalement,

$$E(X) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Enoncé IV-3.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On note f la densité de la loi normale centrée réduite.

Pour tout réel positif x, on pose $F(x) = p(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ puis $H(x) = p(0 \leqslant X \leqslant x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$.

1) En invoquant des raisons géométriques, montrer que pour tout réel positif x, $F(x) = 2H(x)$.

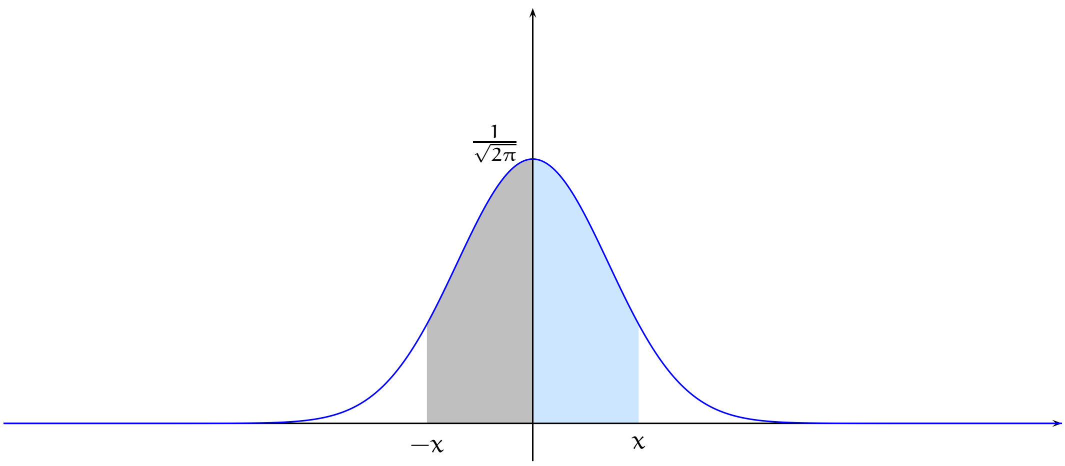
2) Montrer que pour tout réel α de $[0,1[$, l'équation $H(x) = \frac{1-\alpha}{2}$ a une unique solution.

3) En déduire que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Démonstration.

1) On sait que pour tout réel t, $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Pour tout réel t, on a $f(-t) = f(t)$ et donc le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit alors x un réel positif. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0,x]$ (respectivement $[-x,x]$), $H(x)$ (respectivement $F(x)$) est l'aire du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations respectives $t = 0$ et $t = x$ (respectivement $t = -x$ et $t = x$). Pour des raisons de symétrie, $F(x)$ est le double de $H(x)$.



2) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. Donc, la fonction H est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est $H' = f$. Puisque la fonction f est strictement positive sur $[0,+\infty[$, la fonction H est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

La fonction H est dérivable sur $[0,+\infty[$ et en particulier, la fonction H est continue sur $[0,+\infty[$.

$H(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

La limite de la fonction H en $+\infty$ est la moitié de l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f. On sait que cette aire totale est égale à 1 (car f est une densité de probabilité). Par suite, $\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{1}{2}$.

Soit alors $\alpha \in]0,1[$. Donc $-1 < -\alpha < 0$ puis $0 < 1-\alpha < 1$ et enfin, $0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2}$.

En résumé,

- la fonction H est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$,
- $\frac{1-\alpha}{2} \in \left]H(0), \lim_{x\to+\infty} H(x)\right[= \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $H(x) = \frac{1-\alpha}{2}$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On note u_α cette solution. u_α est un réel positif.

3) Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit x un réel positif.

$$p(-x \leqslant X \leqslant x) = 1-\alpha \Leftrightarrow F(x) = 1-\alpha \Leftrightarrow 2H(x) = 1-\alpha \Leftrightarrow H(x) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

D'après la question précédente, il existe un unique réel positif u_α tel que $p(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Enoncé IV-4.

Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, alors, pour tout α dans $]0,1[$ on a,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Démonstration.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Soit $Z_n = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ la variable aléatoire centré réduite associée à X_n.

On a donc $X_n = np + \sqrt{np(1-p)}Z_n$.

D'après la formule de Moivre-Laplace, on sait que pour tous réels a et b,

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = P(a \leqslant Z \leqslant b).$$

Or,

$$\begin{aligned}
a \leqslant Z_n \leqslant b &\Leftrightarrow \sqrt{np(1-p)}a \leqslant \sqrt{np(1-p)}Z_n \leqslant \sqrt{np(1-p)}b \\
&\Leftrightarrow np + \sqrt{np(1-p)}a \leqslant np + \sqrt{np(1-p)}Z_n \leqslant np + \sqrt{np(1-p)}b \\
&\Leftrightarrow np + \sqrt{np(1-p)}a \leqslant X_n \leqslant np + \sqrt{np(1-p)}b \\
&\Leftrightarrow \frac{np + \sqrt{np(1-p)}a}{n} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant \frac{np + \sqrt{np(1-p)}b}{n} \\
&\Leftrightarrow p + a\frac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + b\frac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow p + a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + b\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p + a\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{X_n}{n} \leqslant p + b\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = P(a \leqslant Z \leqslant b).$$

En particulier, si $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

par définition de u_α.
