R.O.C.

Nombres complexes

Pondichéry 2012. Enseignement spécifique. Exercice 4

Enoncé

Partie A **Restitution organisée de connaissances**

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z.
On admet l'égalité $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

Solution

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On sait que $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et donc

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{(z_1z_2)} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2.$$

En résumé, $|z_1z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$. Puisqu'un module est un réel positif, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité précédente, on obtient $|z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tous nombres complexes } z_1 \text{ et } z_2,\ |z_1z_2| = |z_1| \times |z_2|.}$$

Polynésie 2010. Enseignement spécifique. Exercice 1

Enoncé

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions.

1) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Solution

1) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))} \\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$$

2) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

- C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après 1))} \\ &= \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\overline{z}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n.}$$

Probabilités

Nouvelle Calédonie 2014. Enseignement spécifique. Exercice 2

Enoncé

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt.$$

1) Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2) Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

4) En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\,+\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\,+\infty[$.

5) Démontrer alors le théorème énoncé.

Solution

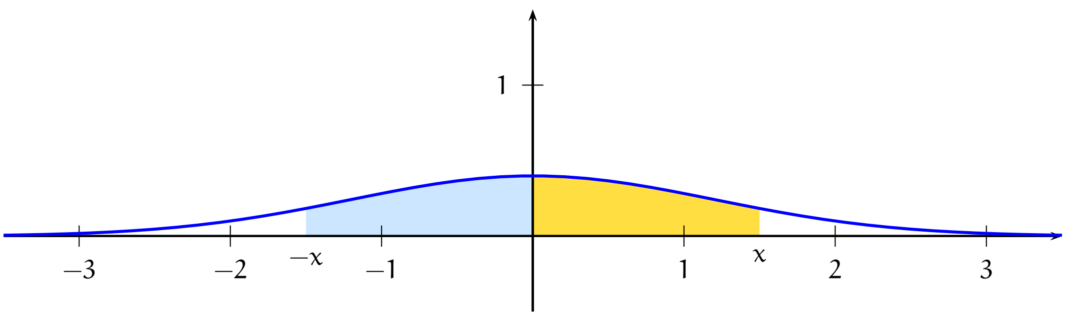
Partie A

Restitution organisée des connaissances

1) La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite.

2) $H(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3) Soit x un réel positif. Puisque la fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine jaune ci-dessous et $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\ dt$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine bleu ci-dessous.



La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc ces deux aires sont égales. Comme $H(x)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la réunion des deux domaines, on en déduit que $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

4) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que sa dérivée est f. On en déduit que pour tout réel positif x, $H'(x) = 2f(x)$.

La fonction f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction H.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$H'(x)$	$+$
H	$0 \nearrow 1$

5) Soit α un réel élément de $]0, 1[$. Alors $1 - \alpha$ est un réel élément de $]0, 1[$.

La fonction H est continue continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to 0} H(x), \lim\limits_{x\to+\infty} H(x)\right[=]0, 1[$, l'équation $H(x) = k$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$. Puisque le réel $1-\alpha$ appartient à $]0, 1[$, on a montré qu'il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $H(\chi_\alpha) = 1 - \alpha$ ou encore tel que $P(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha) = 1 - \alpha$.

Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique. Exercice 2

Enoncé

Partie A

Soient n un entier naturel non nul, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Solution

Partie A

$$\begin{aligned}
f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \text{ et } f \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \Leftrightarrow f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f + \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, les événements $f \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $p \in \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se produisent simultanément. Ils ont donc la même probabilité et en particulier, pour n grand, l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Centres étrangers 2009. Enseignement spécifique. Exercice 1

Enoncé

1) Restitution organisée de connaissances.

Prérequis : on rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

a) Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.
b) Démontrer que si les événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Solution

a) Les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ constituent une partition de l'événement B. La formule des probabilités totales fournit alors

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}).$$

b) Supposons maintenant les événements A et B indépendants.

$$\begin{aligned}p\left(B\cap\overline{A}\right) &= p(B) - p\left(B\cap A\right)\ \text{(d'après a))}\\ &= p(B) - p(B)\times p(A)\ \text{(car les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants)}\\ &= p(B)(1-p(A)) = p(B)\times p\left(\overline{A}\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Asie 2011. Enseignement spécifique. Exercice 4
France métropolitaine 2008. Enseignement spécifique. Exercice 3

Enoncé

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0;t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1) Restitution organisée de connaissances.

Pré-requis :

a) $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux événements tels que $p(B)\neq 0$) ;

b) $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un événement) ;

c) $p([a;b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

$$p_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = \frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$$

et que $p_{[t;+\infty[}([t;t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Solution

Soient s et t deux réels positifs. Vérifions tout d'abord que $p([t,+\infty[)\neq 0$.

$$p([t,+\infty[) = 1 - p([0,t[) = 1 - p([0,t]) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

On a montré au passage que $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$. Ensuite, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $p([t,+\infty[) = e^{-\lambda t}\neq 0$ puis

$$\begin{aligned}p_{[t,+\infty[}([t,t+s]) &= \frac{p((t\leqslant X\leqslant t+s)\cap(X\geqslant t))}{p(X\geqslant t)} = \frac{p(t\leqslant X\leqslant t+s)}{1-p(X<t)} = \frac{p(t\leqslant X\leqslant t+s)}{1-p(X\leqslant t)}\ \text{(car } p(X=t)=0\text{)}\\ &= \frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}\\ &= \frac{\left(1-e^{-\lambda(t+s)}\right)-\left(1-e^{-\lambda t}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)} = \frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}\\ &= 1 - e^{-\lambda t-\lambda s+\lambda t} = 1 - e^{-\lambda s} = F(s).\end{aligned}$$

En particulier, $p_{[t,+\infty[}([t,t+s])$ est indépendant de t.

Analyse

Liban 2008. Enseignement spécifique. Exercice 3

Enoncé

Partie A Démonstration de cours.

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Solution

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit A un réel.

Puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, le réel A n'est pas un majorant de la suite (u_n). Il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Puisque la suite (u_n) est croissante, si n est un entier supérieur ou égal à n_0, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.

On a montré que, pour tout réel A, tous les termes de la suite (u_n) sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Restitution organisée de connaissances

Rochambeau 2012. Enseignement spécifique. Exercice 2
Centres étrangers 2008. Enseignement spécifique. Exercice 4
Asie 2008. Enseignement spécifique. Exercice 4

Enoncé

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Solution

Pour $x > 0$, on pose $t = \ln(x)$ ou encore $x = e^t$ de sorte que x tend vers $+\infty$ si et seulement si t tend vers $+\infty$. On obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(e^t\right)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0,$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Pondichéry 2010. Enseignement spécifique. Exercice 1
Rochambeau 2009. Enseignement spécifique. Exercice 2
Polynésie 2008. Enseignement spécifique. Exercice 4

Enoncé

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.
On suppose connus les résultats suivants :

- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^b f(t)\ dt + \beta \int_a^b g(t)\ dt$.
- Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.

Solution

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors, pour tout réel t de $[a, b]$, $g(t) - f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t))\ dt \geqslant 0$ puis par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$ et donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.
