Polynésie 2014. Enseignement de spécialité

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Le 1[er] août correspond au numéro de jour $j = 1$ et au numéro de mois $m = 8$.

$$j \times 12 + m \times 37 = 1 \times 12 + 8 \times 37 = 12 + 296 = 308.$$

2) a) De manière générale $z = 12j+37m$. Or, $12 \equiv 0$ $[12]$ et $37 \equiv 1$ $[12]$ car $37 = 2\times 36+1$. Par suite, $z \equiv 0\times j+1\times m$ $[12]$ ou encore $z \equiv m$ $[12]$.

b) $474 = 39\times 12+6$ et donc $474 \equiv 6$ $[12]$. Mais alors $m \equiv 6$ $[12]$ ce qui ne laise que la possibilité $m = 6$. Le spectateur est né au mois de juin. Ensuite,

$$j = \frac{z - 37 \times m}{12} = \frac{474 - 37 \times 6}{12} = 21$$

et donc

un spectateur ayant obtenu le nombre 474 avec le programme (A) est né le 21 juin.

Partie B

1) Première méthode. Algorithme modifié.

Variables :	j et m sont des entiers naturels

Traitement :	Pour m allant de 1 à 12 faire :
	  Pour j allant de 1 à 31 faire :
	    z prend la valeur $12j + 31m$
	    Si $z = 503$
	      Afficher z
	    Fin si
	  Fin Pour
	Fin Pour

2) Deuxième méthode.

a) $z = 12j+31m$. Modulo 12, 31 est congru à 7 car $31 = 2\times 12+7$. Donc $z \equiv 0\times j+7\times m$ $[12]$ ou encore $z \equiv 7m$ $[12]$ ou enfin $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

b)
- Si $m = 1$, $7m = 7$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 7.
- Si $m = 2$, $7m = 14$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 2.
- Si $m = 3$, $7m = 21$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 9.
- Si $m = 4$, $7m = 28$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 4.
- Si $m = 5$, $7m = 35$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 11.
- Si $m = 6$, $7m = 42$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 6.
- Si $m = 7$, $7m = 49$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 1.
- Si $m = 8$, $7m = 56$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 8.
- Si $m = 9$, $7m = 63$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 3.
- Si $m = 10$, $7m = 70$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 10.
- Si $m = 11$, $7m = 77$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 5.
- Si $m = 12$, $7m = 84$ et donc le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 est 0.

c) $503 = 12\times 41+11$ et donc le reste de la division euclidienne de 503 par 12 est 11. D'après la question a), ce reste est le même que le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12. D'après la question b), on a $m = 5$. Le spectateur est donc né au mois de mai. Ensuite,

$$j = \frac{z - 31m}{12} = \frac{503 - 31 \times 5}{12} = 29.$$

Un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B) est né le 29 mai.

3) Troisième méthode.

a) $12 \times (-2) + 31 \times 17 = -24 + 527 = 503$. Donc le couple $(-2\ ;\ 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $12x+31y = 503$, alors $12x+31y = 12\times(-2)+31\times 17$ puis $12x + 12 \times 2 = 31 \times 17 - 31y$ et finalement $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

c) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $12x + 31y = 503$. D'après la question précédente, 12 divise $31(17 - y)$. De plus, les entiers $12 = 2^2 \times 3$ et 31 (qui est premier) sont premiers entre eux car sans facteur premier commun. Le théorème de Gauss permet d'affirmer que 12 divise $17 - y$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $17 - y = 12k$ ou encore $y = 17 - 12k$.

De même, 31 divise $x + 2$ et donc il existe un entier relatif k' tel que $x + 2 = 31k'$ ou encore $x = -2 + 31k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entier relatifs puis $x = -2 + 31k'$ et $y = 17 - 12k$.

$$12x + 31y = 503 \Leftrightarrow 12(-2 + 31k') + 31(17 - 12k) = 503 \Leftrightarrow 12 \times 31 \times (k - k') + 503 = 503 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$ sont les couples de la forme $(-2 + 31k, 17 - 12k)$ où k est un entier relatif.

d) Soient k un entier relatif puis $y = 17 - 12k$.

$$1 \leqslant y \leqslant 12 \Leftrightarrow 1 \leqslant 17 - 12k \leqslant 12 \Leftrightarrow -16 \leqslant -12k \leqslant -5 \Leftrightarrow \frac{5}{12} \leqslant k \leqslant \frac{16}{12} \Leftrightarrow k = 1.$$

Pour $k = 1$, on obtient $y = 5$ et $x = 29$ ce qui refournit la date du 29 mai.

