

Planche n° 14. Espaces euclidiens

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (***) I : Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

n° 2 (***) I : 1) Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2) Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3) Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5) (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

n° 3 (****) I : Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de p vecteurs de E ($p \geq 2$). On dit que la famille (x_1, \dots, x_p) est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ($i < j \Rightarrow x_i | x_j < 0$). Montrer que si la famille (x_1, \dots, x_p) est une famille obtusangle alors $p \leq n + 1$.

n° 4 (**I) : (Inégalité de HADAMARD) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E . Montrer que pour tout n -uplet de vecteurs (x_1, \dots, x_n) , on a : $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$. Cas d'égalité ?

n° 5 (**): Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n , on a $|\det A| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right)}$.

n° 6 (***): Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n . Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

n° 7 (**): On munit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
2) Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

n° 8 (**): Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$.

n° 9 (***): Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n . Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

n° 10 (**): Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

n° 11 : Soit f une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , \mathbb{R} -linéaire.

1) Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2) Calculer $\text{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b .
3) C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans \mathbb{C} muni de sa structure euclidienne canonique.

n° 12 (***): Trouver tous les endomorphismes de \mathbb{R}^3 vérifiant $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

n° 13 (**): Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices tAA et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

n° 14 (***) I : Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

n° 15 (***) I : Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leq \det(A+B)$.

n° 16 ()** : Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 euclidien orienté défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge (a \wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

n° 17 (*) I)** : Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

n° 18 (I)** : Soit P le plan de \mathbb{R}^4 d'équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$ dans une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique.

- 1) Déterminer les matrices dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P .
- 2) Calculer la distance d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 à P .

n° 19 ()** : La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

n° 20 (*)** : $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?