Planche n° 14. Espaces euclidiens. Corrigé

n° 1 : La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}{}^tXH_nX &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_ix_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_ix_jt^{i+j-2}\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2 dt \geqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iY^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0,1]$ et on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_it^{i-1}\right)^2 dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXH_nX > 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la matrice } H_n \text{ est symétrique définie positive.}}$$

n° 2 : 1) ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = S$. Donc $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|_2^2 \geqslant 0$. Donc $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).}$$

2) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PD{}^tP$.
Posons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = PD{}^tP = PD'D'{}^tP = {}^t(D{}^tP)D'{}^tP,$$

et la matrice $A = D'tP$ convient.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})/\ S = {}^tAA.}$$

On a aussi ${}^t(-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A.

3)

$$\begin{aligned}S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ {}^tXSX > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ \|AX\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ AX \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

4) Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}A \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow SX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}S,$$

et

$$X \in \mathrm{Ker}S \Rightarrow {}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow \|AX\|_2^2 = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \mathrm{Ker}A.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A).}$$

5) Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 {}^t P_0$.
Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 {}^t P_0$.
La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 {}^t P_0 = P_0 D_0 {}^t P_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.
M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \underset{\lambda \in \text{Sp}(M)}{\oplus} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.
Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S.
Ainsi, nécessairement la matrice ${}^t P_0 M P_0$ est une matrice diagonale D. L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathscr{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \exists! R \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ R^2 = S.}$$

n° 3 : 1 ère solution. Soit $p \geqslant 2$. Montrons que si la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle alors la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ est libre.
Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle. Supposons que la famille $(x_1, ..., x_{p-1})$ soit liée.
Il existe donc $(\lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.
Quite à multiplier les deux membres de l'égalité par -1, on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif.
On pose $I = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, p-1]\!] /\ \lambda_k \leqslant 0\}$ (éventuellement J est vide).
Si J est vide, il reste $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\|^2 = -\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) \left(\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \right) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j\, (x_i | x_j) \leqslant 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J,\ (x_i|x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leqslant 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $\displaystyle\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i\, (x_i | x_p) < 0$.
On a montré que la famille $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre et on en déduit que $p - 1 \leqslant n$ ou encore $p \leqslant n + 1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E_n \geqslant 1$ que tout famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$.

• Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1. On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.
Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n + 1$. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille obtusangle de E_{n+1}.
Si $p = 1$ alors $p \leqslant n + 2$. Supposons dorénavant $p \geqslant 2$.
On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p - 1$ d'un espace euclidien de dimension n.
Soit $F = x_p^\perp$. Puisque la famille $(x_1, ..., x_p)$ est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n.
On note y_1, y_2,..., y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, ... , x_{p-1} sur F. On sait que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!],\ y_i = x_i - \frac{(x_i | x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i | y_j) = (x_i | x_j) - 2 \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)\,\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i | x_j) - \frac{(x_i | x_p)\,(x_j | x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p - 1 \leqslant n + 1$ et donc $p \leqslant n + 2$. Le résultat est démontré par récurrence.

n° 4 : Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, l'inégalité est vraie.
Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1, ..., e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille $(x_1, ..., x_n)$. Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned}
|\det_B(x_1, ..., x_n)| = |\det_{B_0}(x_1, ..., x_n)| &= \text{abs}\left(\begin{vmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{vmatrix}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} |(x_k|e_k)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n,\ |\det_B(x_1, ..., x_n)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}}$$

Ensuite,

- si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul
- si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|(x_k|e_k)| = \|x_k\|\|e_k\|$. Les cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, x_k est colinéaire à e_k ou encore si et seulement si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

n° 5 : C'est le n° 4.

n° 6 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| = \left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1 \times a_{i,j} \times 1\right| = \left|{}^tXAX\right| = |(AX|X)| \\
&\leqslant \|AX\|\|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice A est orthogonale)} \\
&= n.
\end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (X, AX) est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A.
On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1. Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0, 1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geqslant a_{i,j}^2$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

n° 7 : Le produit scalaire usuel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))^2,\ (A|B) = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

1) Déterminons l'orthogonal de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in \mathscr{S}_(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) = -\mathrm{Tr}({}^tBA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathscr{S}_3(\mathbb{R})) = \dim\left(((\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp\right)$, on a montré que

$$\boxed{(\mathscr{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).}$$

2) Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathscr{A}_3(R)) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.$$

n° 8 : Posons $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. On sait que

$$\begin{aligned}
r(u) &= (\cos\theta)u + (1 - \cos\theta)(u|k)k + (\sin\theta)k \wedge u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(u|(e_1 + e_2))(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_1 + e_2) \wedge u \\
\text{« = »}\ & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} z \\ -z \\ -x + y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et la matrice cherchée est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

n° 9 : La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1 + \lambda_1)\ldots(1 + \lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \lambda_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1 + \lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.
Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \ldots + \ln(\lambda_n))\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}(\ln(1 + \exp(\ln(\lambda_1))) + \ldots + \ln(1 + \exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+e^x)$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k=\ln(\lambda_k)$.
L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1} \text{ puis } f''(x)=\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$ ce qui démontre l'inégalité $(*)$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}),\ 1+\sqrt[n]{\det(A)} \leqslant \sqrt[n]{\det(I_n+A)}.}$$

n° 10 : Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1. Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\boxed{\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}))=2^n n!.}$$

n° 11 1) Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\text{Re}(z)).1+(\text{Im}(z)).i)=(\text{Re}(z))f(1)+(\text{Im}(z))f(i)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})f(1)+\frac{1}{2i}(z-\overline{z})f(i) \\ &= \frac{f(1)-if(i)}{2}z+\frac{f(1)+if(i)}{2}\overline{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a=\frac{f(1)-if(i)}{2}$ et $b=\frac{f(1)+if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est $\mathbb{R}$-linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

2)

$$\text{Tr}(f)=\text{Re}(f(1))+\text{Im}(f(i))=\text{Re}(a+b)+\text{Im}(i(a-b))=\text{Re}(a+b)+\text{Re}(a-b)=2\text{Re}(a)$$

et

$$\begin{aligned} \det(f) &= \text{Re}(a+b)\text{Im}(i(a-b))-\text{Im}(a+b)\text{Re}(i(a-b))=\text{Re}(a+b)\text{Re}(a-b)+\text{Im}(a+b)\text{Im}(a-b) \\ &= (\text{Re}(a))^2-(\text{Re}(b))^2+(\text{Im}(a))^2-(\text{Im}(b))^2=|a|^2-|b|^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}(f)=2\text{Re}(a) \text{ et } \det(f)=|a|^2-|b|^2.}$$

3) Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z'=(\text{Re}z)(\text{Re}z')+(\text{Im}z)(\text{Im}z')=\frac{1}{4}(z+\overline{z})(z'+\overline{z'})-\frac{1}{4}(z-\overline{z})(z'-\overline{z'})=\frac{1}{2}(\overline{z}z'+z\overline{z'})=\text{Re}(\overline{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1,i)$ soit directe,

$$[z,z']=(\text{Re}z)(\text{Im}z')+(\text{Im}z)(\text{Re}z')=\frac{1}{4i}(z+\overline{z})(z'-\overline{z'})-\frac{1}{4i}(z-\overline{z})(z'+\overline{z'})=\frac{1}{2i}(\overline{z}z'-z\overline{z'})=\text{Im}(\overline{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1,i)$. Puisque la base $(1,i)$ est orthonormée,

$$f=f^* \Leftrightarrow M={}^tM \Leftrightarrow \text{Im}(a+b)=\text{Re}(i(a-b)) \Leftrightarrow \text{Im}(a+b)=-\text{Im}(a-b) \Leftrightarrow 2\text{Im}a=0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{f=f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.}$$

n° 12 : Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. Posons $u = f(i)$, $v = f(j)$ et $w = f(k)$. Nécessairement, $u \wedge v = f(i) \wedge f(j) = f(i \wedge j) = f(k) = w$ et de même $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$.

1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u = v = w = 0$ et donc $f = 0$. Réciproquement, l'application nulle convient.

2ème cas. • Si les trois vecteurs u, v et w sont non nuls alors $u \wedge v \neq 0$ et donc la famille (u, v) est libre. Mais alors la famille (u, v, w) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.
Ensuite $w = u \wedge v$ est orthogonal à u et v et $v = w \wedge u$ est orthogonal à u. On en déduit que la famille (u, v, w) est une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.
Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$ et de même $\|u\| = \|v\|\|w\|$ et $\|v\| = \|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\| = (\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u, v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$ et $\|u\| = \|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2 = 1$ et de même $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$.
Finalement, la famille (u, v, w) est une base orthonormée directe.
En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire une rotation de $\mathbb{R}^3$.

• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3. On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que la famille (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormée directe.
Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $f(e_i \wedge e_j) = f(e_i) \wedge f(e_j)$.
Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1) \wedge f(e_2) = e_3 = f(e_3) = f(e_1 \wedge e_2) \text{ et } f(e3) \wedge f(e1) = e_3 \wedge f(e_1) = f(e_2) = f(e_3 \wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de $\mathbb{R}^3$.

n° 13 : Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A{}^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.
Notons alors $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1 D {}^tP_1$ et $S_2 = P_2 D {}^tP_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2({}^tP_1 S_1 P_1){}^tP_2 = (P_2{}^tP_1)S_1{}^t(P_2{}^tP_1).$$

Comme la matrice $P_2{}^tP_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A{}^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}}$$

n° 14 : **Remarque.** Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^tB{}^tA = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles .

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice n° 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM{}^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM{}^tN = {}^t(M{}^tN)M{}^tN$. D'après le n° 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.}$$

n° 15 : Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.
D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $(\mathscr{S}_n(\mathrm{R}), +, .)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geqslant 0$.
La matrice $A + B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A + B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A + B) \geqslant 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.
D'après l'exercice n° 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})M$ et donc

$$\det(A+B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1})BM^{-1} = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X,

$${}^tXCX = {}^tX^t(M^{-1})BM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geqslant 0$$

et ses valeurs propres λ_1,..., λ_n sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1 + \lambda_1)...(1 + \lambda_n) \geqslant 1 + \lambda_1...\lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2(1 + \det C) \leqslant (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A + B).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leqslant \det(A + B).}$$

n° 16 : Si $a = 0$, $f = 0$ et il n'y a plus rien à dire.
Si $a \neq 0$, puisque $f(a) = 0$, 0 est valeur propre de f et $\text{Vect}(a) \subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à a, d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Donc le réel non nul $-\|a\|^2$ est valeur propre de f et $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$. Maintenant, $\dim\text{Vect}(a) + \dim a^\perp = 3$ et donc $\text{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$ puis $E_0(f) = \text{Vect}(a)$ et $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable. On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

n° 17 : Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.
On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i + e_j)|(e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.
Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ de la base othonormée $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ conserve la norme.

Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

n° 18 : Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i, j) = ((1, -1, 0, 0)(1, 0, 2, -3))$. On orthonormalise la base (i, j).
On prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ puis $e_2' = j-(j|e_1)e_1 = (1, 0, 2, -3)-\frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$ puis $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

$$\boxed{\text{Une base orthonormée de } P \text{ est } (e_1, e_2) \text{ où } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) \text{ et } e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6).}$$

1) Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x - y)(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{54}(x + y + 4z - 6t)(1, 1, 4, -6) \\ &= \frac{1}{27}(14x - 13y + 2z - 3t, -13x + 14y + 2z - 3t, 2x + 2y + 8z - 12t, -3x - 3y - 12z + 18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$\boxed{M = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.}$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$\boxed{S = 2M - I_4 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.}$$

2) La distance de u = (x,y,z,t) à P est

$$\begin{aligned}\|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27}\|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y+19z+12t, 3x+3y+12z+9t)\| \\ &= \frac{1}{27}\sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2+(13x+14y-2z+3t)^2+(-2x-2y+19z+12t)^2+(3x+3y+12z+9t)^2}.\end{aligned}$$

n° 19 : 1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}{}^tXAX &= (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i\neq j} x_i x_j = \sum_{i\neq j}(x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2\right) \\ &= \sum_{i\neq j} (x_i - x_j)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1\leqslant i\leqslant n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.

2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
On note alors que $\mathrm{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n-1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n-1)n + \lambda = \mathrm{Tr}A = n(n-1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est positive et non définie.}}$$

n° 20 : Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0,1[$, la matrice $(1-\lambda)A+\lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.
Pour $j \in [\![1,n]\!]$, on note respectivement A_j, B_j et C_j la j-ème colonne de matrice A, de la matrice B et de la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$1 = \|C_j\| \leqslant (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1-\lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1-\lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0,1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1-\lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que la matrice $(1-\lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$$\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas convexe.}}$$