Planche n° 18. Topologie

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (**) : Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

n° 2 (* I) :** **1)** Inégalités de Hölder et de Minkowski. Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que pour $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^q}{q}$.

b) En déduire que $\forall((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}$.

c) En déduire que $\forall((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$.

2) Soit α un réel strictement positif. Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha}$.

a) Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1$, N_α est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Dessiner les « boules unités » de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{3}{2}, 2, +\infty\right\}$.

c) Montrer que, pour $x = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ fixé, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = \text{Max}\{|x_k|,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} = N_\infty(x)$.

d) Montrer que si $0 < \alpha < 1$, N_α n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geqslant 2$).

n° 3 (I) :** Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N'(f) = |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

n° 4 (* I) :** **(topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)**

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).
3) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
4) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5) Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
7) Propriétés topologiques de l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que la forme quadratique $(x, y) \mapsto ax^2+2bxy+cy^2$ soit définie positive ?
8) Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
9) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

n° 5 (**) : Montrer qu'entre deux rationnels distincts, il existe un irrationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

n° 6 (**) : Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
2) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et$A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

5) $\overset{\circ}{\widehat{A\setminus B}} = \overset{\circ}{A}\setminus\overline{B}$.

6) $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

n° 7 (**) : Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ soient deux à deux distincts.

n° 8 (**) : Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\|\ \|_\infty$.
D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynômiales. Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

n° 9 (I) :** (**Distance d'un point à une partie**)

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.
Pour $x \in E$, on pose $d_A(x) = d(x, A)$ où $d(x, A) = \mathrm{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

1) Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.

2) a) Montrer que si A est fermée, $\forall x \in E$, $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x \in E$, $\exists a \in A/\ d_A(x) = \|x - a\|$.

3) Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.

4) Montrer d_A est continue sur E.

5) A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est injective.

6) Dans l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A = \left\{f \in E/\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 1\right\}$. Calculer $d_A(0)$.

n° 10 (**) : **1)** Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.
2) Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.

n° 11 (***) : Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

n° 12 (***) : Calculer $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\mathrm{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\mathrm{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\}$.

n° 13 (* I) :** Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

n° 14 (* I) :** Donner un développement à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ de la n-ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

n° 15 (* I) :** Soit z un nombre complexe. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.