Planche n° 19. Applications linéaires continues, normes matricielles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (*) : On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P \in E,\ \|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

1) Vérifier brièvement que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2) Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E,\ f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

n° 2 (**) : On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E,\ \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E,\ C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et calculer leur norme.

n° 3 (* I) :** On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$.

On pose $T : \begin{array}{ccl} E & \to & E \\ f & \mapsto & Tf : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \end{array} \end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

1) Démontrer que T est continu sur $(E, \|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.
2) Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

n° 4 (**) : On munit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A \in E,\ N(A) = \text{Sup}_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A \in E,\ f(A) = \text{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E, N) et déterminer $|||f|||$.

n° 5 (***) : Déterminer $s = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est **1)** $\|\ \|_1$, **2)** $\|\ \|_2$, **3)** $\|\ \|_\infty$.

n° 6 (*) : Une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$, est-elle nécessairement une « norme trois barres » ?

n° 7 (**) : Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

n° 8 (**) : Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) = N(A)N(B)$.

n° 9 (***) : On pose $\forall X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|X\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \text{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.
Déterminer les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement associées aux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On notera $|||\ |||_1$ et $|||\ |||_\infty$ ces normes.

n° 10 (I) :** Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\dfrac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

