Planche n° 20. Suites et séries de matrices.
Corrigé

n° 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n = \sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & -\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n) = \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}$.
De plus, $\cos(\theta_n) > 0$ et $\sin(\theta_n) > 0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n = \left(\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1)$.
D'autre part, $n\theta_n = n\operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n \times \frac{a}{n} = a$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^n = 1.\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall a > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.}$$

n° 2 : Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

(3) ⇒ (2). On sait que si la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$.

(2) ⇒ (1). Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel n, $A^nX = \lambda^nX$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty} A^nX = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^nX = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0$.
Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$ alors $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$.

(1) ⇒ (3). Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset B_o(0,1)$. On sait (voir exercice n° 20 planche 5 : décomposition de Dunford) qu'il existe deux matrices D et N telles que
1) $A = D + N$
2) D diagonalisable
3) N nilpotente
4) $DN = ND$.
De plus, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A.

On note k l'indice de nilpotence de N. Puisque les matrices D et N convergent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire pour $n \geqslant k$

$$A^n = (D+N)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j.$$

Il existe une matrice $P \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ tel que $D = P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j} D^{n-j}N^j = P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$.

Soit $j \in [\![0, k]\!]$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$, $n \geqslant j$ converge. Posons $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Alors $\forall n \geqslant j$, $\binom{n}{j}\Delta^{n-j} = \text{diag}\left(\binom{n}{j}\lambda_1^{n-j}, \ldots, \binom{n}{j}\lambda_p^{n-j}\right)$. Maintenant, si λ est une valeur propre de Δ (et donc de A), $\binom{n}{j}\lambda^{n-j} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}\lambda^{n-j} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^j\lambda^{n-j} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $|\lambda| < 1$ et donc la série de terme général $\binom{n}{j}\lambda^{n-j}$, $n \geqslant j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\binom{n}{j}\Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M \mapsto P \times M \times PN^j$ est continue sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j \in [\![0, k]\!]$, la série de terme général $P \times \binom{n}{j}\Delta^{n-j} \times PN^j$ converge et donc la série de terme général A^n converge car est somme de $j+1$ séries convergentes.

n° 3 : $\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3 - X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 - X \end{vmatrix} = X^2 - \dfrac{1}{6}X - \dfrac{1}{6} = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)\left(X + \dfrac{1}{3}\right)$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = P\left(\sum_{k=0}^{n} D^k\right)P^{-1} = P\ \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)P^{-1}.$$

Puisque $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{3}$ sont dans $]-1, 1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général D^k. Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général A^k converge. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^nP^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n\right)P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}) \\ &= P\ \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)P^{-1} = P\ \text{diag}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}, \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Remarque. D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est $(I - A)^{-1}$.

n° 4 : Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel n, on a $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est complet en tant que $\mathbb{C}$ espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général A^n, $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\begin{aligned}(I - A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I - A)\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I - A)M) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(I - A^{n+1}) = I \text{ } (\lim_{n\to+\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}).\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $I - A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. On en déduit encore

$$\|(I - A)^{-1} - (I + A)\| = \left\|\sum_{n=2}^{+\infty} A^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}.$$

n° 5 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A)) \neq 0$ et d'autre part $\exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p \to +\infty} \det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Par suite, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\det\left(\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}\right) \neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

n° 6 : **1)** $\chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1) - (-2X-2) - (2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en -1, 1 et 3, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \\ 8a_n + \frac{3}{2}(1 - (-1)^n) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = 3^n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{8}(3^n - 2 + (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{8}(-3^n + 6 + 3(-1)^n) \end{array}\right. .$$

Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3).$$

Maintenant,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel t,

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3) \\
&= \frac{e^{3t} - 2e^t + e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4(e^t - e^{-t})}{8}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-e^{3t} + 6e^t + 3e^{-t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t} - 8e^t & 8e^{3t} - 8e^t \\ 2e^{3t} - 2e^{-t} & 2e^{3t} + 6e^{-t} & 2e^{3t} - 2e^{-t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-t} & -2e^{3t} + 8e^t - 6e^{-t} & 2e^{3t} + 8e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.}$$

2) $\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1 \\ 6 & 4-X & 2 \\ -10 & -4 & -2-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-2X) - 6(-X+2) - 10(X-2) = (X-2)[-X(X-4) + 6 - 10] = -(X-2)(X^2-4X+4) = -(X-2)^3$. On est dans la situation où A a une unique valeur propre. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $(A - 2I_3)^3 = 0$ et donc pour tout réel t,

$$\exp(tA) = \exp(t(A-2I_3)+2tI_3) = \exp(t(A-2I_3))\times\exp(2tI_3) \text{ (car les matrices } t(A-2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)}$$
$$= \left(I_3 + t(A-2I_3) + \frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2\right)\times e^{2t}I_3$$
$$= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix} + \frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix}$$
$$= e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}2&1&1\\6&2&2\\-10&-4&-4\end{pmatrix} + \frac{t^2e^{2t}}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\4&2&2\\-4&-2&-2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \exp(tA) = \begin{pmatrix}(2t+1)e^{2t}&te^{2t}&te^{2t}\\(2t^2+6t)e^{2t}&(t^2+2t+1)e^{2t}&(t^2+2t)e^{2t}\\(-2t^2-10t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}&(-t^2-4t)e^{2t}\end{pmatrix}.}$$

n° 7 :

$$\chi_A = \begin{vmatrix}-X&1/2&-2\\1/2&-X&0\\0&0&-1/2-X\end{vmatrix} = -X\left(X^2+\frac{1}{2}X\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}\right) = -X^2\left(X+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(X+\frac{1}{2}\right) = -\left(X+\frac{1}{2}\right)^2\left(X-\frac{1}{2}\right).$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n\chi_A + a_nX^2+b_nX+c_n$ où $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ et $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$.
On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient $-a_n+b_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
Maintenant,

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a_n}{4}+\frac{b_n}{2}+c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{a_n}{4}-\frac{b_n}{2}+c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ -a_n+b_n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ \frac{a_n}{2}+2c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ -a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\\ c_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{array}\right.$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3$ avec
$A^2 = \begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1/2&-2\\1/2&0&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4&0&1\\0&1/4&-1\\0&0&1/4\end{pmatrix}$. On en déduit que pour $|t|<2$,

$$\ln(I_3+tA) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}A^n$$
$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A$$
$$+ \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3.$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\ln(I_3+tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A^2\\
&+ \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A\\
&+ \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(t/2)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A^2 + \left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)A\\
&+ \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}-1\right) + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)I_3\\
&= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1\\ 0 & 1/4 & -1\\ 0 & 0 & 1/4\end{pmatrix} + \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2\\ 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\\
&+ \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{t}{2}\right) + \frac{2t}{2-t} + 3\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t}\\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\forall t \in]-2,2[,\ \ln(I_3+tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t}\\ 0 & 0 & \ln\left(1-\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}.}
$$

n° 8 : 1) a) Soit $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^3$. $f_{\overrightarrow{\omega}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$
f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{x}\right).\overrightarrow{y} = \left(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x}\right).\overrightarrow{y} = \left[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right] = -\left[\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}\right] = -\left(\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{y}\right).\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}.f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{y}\right).
$$

Donc,

$$
\boxed{\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ f_{\overrightarrow{\omega}} \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^3).}
$$

b) Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathscr{A}(\mathbb{R}^3)\\ \overrightarrow{\omega} & \mapsto & f_{\overrightarrow{\omega}}\end{array}$.

• Vérifions que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{\omega}_1, \overrightarrow{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2)\right)\left(\overrightarrow{x}\right) &= f_{\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1+\lambda_2\overrightarrow{\omega}_2}\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2\right)\wedge = \lambda_1\left(\overrightarrow{\omega}_1\wedge\overrightarrow{x}\right) + \lambda_2\left(\overrightarrow{\omega}_2\wedge\overrightarrow{x}\right)\\
&= \lambda_1 f_{\overrightarrow{\omega}_1}\left(\overrightarrow{x}\right) + \lambda_2 f_{\overrightarrow{\omega}_2}\left(\overrightarrow{x}\right) = \left((\lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)\right)\left(\overrightarrow{x}\right)
\end{aligned}
$$

et donc $\varphi(\lambda_1\overrightarrow{\omega}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\omega}_2) = \lambda_1\varphi(\overrightarrow{\omega}_1) + \lambda_2\varphi(\overrightarrow{\omega}_2)$. On a montré que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathscr{A}(\mathbb{R}^3))$.

• Vérifions que φ est injective. Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$.

$$
\overrightarrow{\omega} \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow f_{\overrightarrow{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.
$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On obtient $\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{x}\in\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$. On a montré que φ est injective.

• Enfin, $\dim\left(\mathscr{A}_3(\mathbb{R})\right)=\dfrac{3\times(3-1)}{2}=3=\dim(\mathbb{R}^3)<+\infty$. On en déduit que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathscr{A}(\mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\boxed{\forall f\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^3),\ \exists\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3/\ f=f_{\overrightarrow{\omega}}.}$$

2) Soit $\overrightarrow{\omega}\in\mathbb{R}^3$. Si $\overrightarrow{\omega}=\overrightarrow{0}$, alors $f_{\overrightarrow{\omega}}=0$ et donc $\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

On suppose dorénavant $\overrightarrow{\omega}\neq\overrightarrow{0}$. On pose $\overrightarrow{e_3}=\dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|}\overrightarrow{\omega}$ puis on complète la famille orthonormale $\left(\overrightarrow{e_3}\right)$ en une base orthonormale directe $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ (en particulier $\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2}$).

• Puisque $\overrightarrow{e_3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\omega}$, $f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_3}\right)=\overrightarrow{0}$. On en déduit que

$$\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)\left(\overrightarrow{e_3}\right)=\mathrm{Id}\left(\overrightarrow{e_3}\right)+f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_3}\right)+\frac{1}{2}f^2_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_3}\right)+\frac{1}{6}f^3_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_3}\right)+\ldots=\overrightarrow{e_3}.$$

• D'autre part, $f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{e_1}=\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\overrightarrow{e_3}\wedge\overrightarrow{e_1}=\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\overrightarrow{e_2}$ et de même $f_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_2}\right)=-\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\overrightarrow{e_1}$.
On en déduit que $f^2_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)=-\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^2\overrightarrow{e_1}$ et donc que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)=(-1)^n\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n}\overrightarrow{e_1}\quad\text{puis}\quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)=(-1)^n\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n+1}\overrightarrow{e_2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)\left(\overrightarrow{e_1}\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_1}\right)\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_2}\text{ (somme de deux séries convergentes)}\\&=\cos\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)\overrightarrow{e_1}+\sin\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f^{2n}_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_2}\right)=(-1)^n\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n}\overrightarrow{e_2}\quad\text{puis}\quad f^{2n+1}_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_2}\right)=-(-1)^n\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n+1}\overrightarrow{e_1}.$$

et donc

$$\begin{aligned}\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)\left(\overrightarrow{e_2}\right)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^n_{\overrightarrow{\omega}}\left(\overrightarrow{e_2}\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n}}{(2n)!}\right)\overrightarrow{e_2}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\overrightarrow{e_1}\\&=-\sin\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)\overrightarrow{e_1}+\cos\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)\overrightarrow{e_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $\exp\left(f_{\overrightarrow{\omega}}\right)$ dans la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ est $\begin{pmatrix}\cos\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)&-\sin\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)&0\\\sin\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)&\cos\left(\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|\right)&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $\exp(f_{\overrightarrow{\omega}})$ est la rotation d'angle $\left\|\overrightarrow{\omega}\right\|$ autour de $\overrightarrow{\omega}$.

n° 9 : On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\ \|$. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

$$\left\|\sum_{k=0}^{p}\frac{A^k}{k!}-\left(I+\frac{A}{p}\right)^p\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right)A^k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right|\|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\dfrac{1}{k!}-\dfrac{C_p^k}{p^k}=\dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{\overbrace{p\times(p-1)\times\ldots\times(p-k+1)}^{k}}{\underbrace{p\times p\times\ldots\times p}_{k}}\right)\geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_p^k}{p^k}\right|\|A\|^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{\|A\|^k}{k!}-\left(1+\frac{\|A\|^p}{p}\right)^p\underset{n\to+\infty}{\to}e^{\|A\|}-e^{\|A\|}=0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p}\right)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I + \frac{A}{p}\right)^p$.

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p}\right)^p.}$$

n° 10 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque χ_A est de degré n, la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[\mathbb{C}] \text{ et } (a_0^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} + \ldots + a_1^{(k)} A + a_0^{(k)} I_n$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, \ldots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$. Enfin, puisque $\mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{A^k}{k!} \in \mathrm{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I_n)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$