# Planche n° 22. Fonctions de plusieurs variables. Corrigé

**n° 1 : 1)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand $x$ tend vers $0$, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers $0$. Donc, si f a une limite réelle en $0$, cette limite est nécessairement $0$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. Quand $x$ tend vers $0$, le couple $(x,x)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\dfrac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

**2)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \dfrac{1}{2}|xy|$. Comme $\dfrac{1}{2}|xy|$ tend vers $0$ quand le couple $(x,y)$ tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de $f$. $f(x,y)$ tend vers $0$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.

**3)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y}$. Quand $y$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

**4)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \dfrac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \dfrac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand $x$ tend vers $0$, le couple $(x,x)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

**5)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.
Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \dfrac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. Quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

**6)** f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.
$\dfrac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \dfrac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \dfrac{|x|}{2}$ et donc f tend vers $0$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.

**7)** f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2-y^2+z^2=0$.
$f(x,0,0) = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $0$ par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

**8)** $f(2+h,-2+k,l) = \dfrac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\dfrac{1}{4}$ quand $h$ tend vers $0$ et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \dfrac{1}{4}$ quand $l$ tend vers $0$. Donc, f n'a pas de limite réelle quand $(x,y,z)$ tend vers $(2,-2,0)$.

**n° 2 :** • f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
• **Continuité en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers $0$ quand le couple $(x,y)$ tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$. On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** f est de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$**.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, $f$ admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

• **Continuité de** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers $0$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers $0$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

**n° 3 :** On pose $D = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

• $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.

• $f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de $f$ en $(0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \begin{cases} y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$

Comme $y^2$ tend vers $0$ quand $(x,y)$ tend vers $0$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ et donc $f$ est continue en $(0,0)$ puis

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, $x_0$ réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $x_0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$, $x_0$ réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} = \frac{y^2 \sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)}{y} = y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\dfrac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0}\right| \leqslant |y|$ puis que $\dfrac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0}$ tend vers $0$ quand $y$ tend vers $0$. Par suite, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ existe et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$. Finalement, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0, 0)$, $x_0$ réel donné. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\right| = \begin{cases} |y| \left|\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

Quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$, $|y|$ tend vers $0$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ quand $(x, y)$ tend vers $(x_0, 0)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0, 0)$ et finalement

la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Etudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0, 0)$, $x_0$ réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right| = \begin{cases} \left|2y \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant 2|y| + |x|.$$

Quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers $0$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ tend vers $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$.

Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = 2y \sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right) - x_0 \cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$. Quand $y$ tend vers $0$, $2y \sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ tend vers $0$ car $\left|2y \sin\left(\dfrac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0 \cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$ n'a pas de limite quand $y$ tend vers $0$ et la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0, 0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

f est de classe $C^1$ sur $\Omega \cup \{(0, 0)\}$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$. On en déduit que $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$.

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{y \cos\left(\dfrac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand $y$ tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. On a montré que $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$.

**n° 4 :** Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\varphi(x,y)=(z,t)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x-e^y=z\\ x+y=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x-e^{t-x}=z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ (e^x)^2-ze^x-e^t=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\ e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t}\text{ ou }e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\\ y=t-x\end{array}\right.\quad(\text{car }z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\\ y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\end{array}\right.\quad(\text{car }z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par $\varphi$ et donc $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\begin{vmatrix}e^x&-e^y\\1&1\end{vmatrix}=e^x+e^y$. Le jacobien de $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$$\boxed{\varphi\text{ est un }C^1\text{-difféomorphisme de }\mathbb{R}^2\text{ sur lui-même.}}$$

**n° 5 :** Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x:y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f_x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{y\to-\infty}f_x(y),\lim\limits_{y\to+\infty}f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f:(x,y)\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2n+1)y^{2n}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction $\varphi$ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel $x$ et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi(x)-x=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n}+\varphi'(x)-1=0$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- C'est vrai pour $p=1$.
- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que la fonction $\varphi$ soit $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi'=\dfrac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $\varphi$ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction }\varphi\text{ est de classe }C^\infty\text{ sur }\mathbb{R}.}$$

Calculons maintenant $I=\displaystyle\int_0^2\varphi(t)\ dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1}+0-0=0$, on a $\varphi(0)=0$ et puisque $1^{2n+1}+1-2=0$, on a $\varphi(2)=1$.
Maintenant, pour tout réel $x$ de $[0,2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi'(x)\varphi(x)-x\varphi'(x)=0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0,2]$, on obtient

$$\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx+\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\ dx-\int_0^2 x\varphi'(x)\ dx=0\ (*).$$

Or, $\displaystyle\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx=\left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2=\frac{1}{2n+2}$. De même, $\displaystyle\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\ dx=\left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}$ et donc $\displaystyle\int_0^2\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx+\int_0^2\varphi'(x)\varphi(x)\ dx=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\varphi(x)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0,2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x)\,dx = -2 + I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\dfrac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$ et on obtient $I = \dfrac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2 \varphi(x)\,dx = \frac{3n+2}{2n+2}.}$$

**n° 6 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f_x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{y\to-\infty} f_x(y), \lim\limits_{y\to+\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction $\varphi$ implicitement définie par l'égalité $f(x,y) = 0$ est dérivable en tout réel $x$ et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en $0$ un développement limité d'ordre $3$. Déterminons ce développement limité.

**1ère solution.** Puisque $e^{0+0} + 0 - 1 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + ax^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \left(a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$ fournit alors $a + \dfrac{1}{8} + a = 0$ et $b + \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{48} + b = 0$ ou encore $a = -\dfrac{1}{16}$ et $b = \dfrac{1}{192}$.

**2ème solution.** On a déjà $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1) - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\dfrac{\varphi''(0)}{2} = -\dfrac{\frac{1}{2}}{2\times 2^2} = -\dfrac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x) = -\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} + (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\dfrac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1/2}{4} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{1}{192}$. La formule de Taylor-Young refournit alors

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).}$$

**n° 7 :** On dérive par rapport à $\lambda$ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda > 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r\lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

**n° 8 : 1)** f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0)$ est un point critique de f.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{4} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Réciproquement, $r = 6x+6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt-s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt-s^2)\left(2, \dfrac{1}{4}\right) = (rt-s^2)\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\dfrac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{\text{f n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$$

**2)** La fonction f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0)$ est un point critique de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x-y) + 4x^3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{ (0,0), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) \right\}.$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4+12x^2)(-4+12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

• $(rt - s^2)\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 48(12 - 2 - 2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2 \times 12 - 4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\ &\geqslant x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2+y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

et $f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

• Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

• $f(0, 0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Pour $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[ \setminus \{0\}$, $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0, 0)$ dans tout voisinage de $(0, 0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

$$\boxed{\text{f admet un minimum global égal à 8, atteint en } \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right).}$$

**n° 9 :** On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\| \ \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} (A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\|^2$.

Maintenant, la formule $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}{}^t(\text{com}(M))$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0}\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|=0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\|=0.$$

Comme l'application $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de $f$ en $A$.

$$\boxed{\forall A\in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H)=-A^{-1}HA^{-1}.}$$

**n° 10 :** Pour tout complexe $z$ tel que $|z|\leqslant 1$,

$$|\sin(z)|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\mathrm{sh}(|z|)\leqslant\mathrm{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z=i$ car $|\sin(i)|=\left|\dfrac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}\right|=\dfrac{e-e^{-1}}{2}=\mathrm{sh}(1)$.

$$\boxed{\mathrm{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}=\mathrm{sh}(1).}$$

**n° 11 :** **1)** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y)=2x+2y+e^{x+y}=Q(x,y)$. Les fonctions $P$ et $Q$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de Schwarz, $\omega$ est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2+e^{x+y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $f$ une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2y+e^{x+y}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+2y+e^{x+y}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=x^2+2xy+e^{x+y}+g(y)\\ 2x+e^{x+y}+g'(y)=2x+2y+e^{x+y}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=x^2+2xy+e^{x+y}+g(y)\\ g(y)=y^2+\lambda\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ f(x,y)=(x+y)^2+e^{x+y}+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de $\omega$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto(x+y)^2+e^{x+y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

**Remarque.** On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x,y)=(x+y)^2+e^{x+y}$ alors $df=\omega$.

**2)** La forme différentielle $\omega$ est de classe $C^1$ sur $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de Schwarz, $\omega$ est exacte sur $\Omega$ si et seulement si $\omega$ est fermée sur $\Omega$.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x-y}+y\dfrac{1}{(x-y)^2}\right)=-\dfrac{1}{(x-y)^2}-\dfrac{2y}{(x-y)^3}=-\dfrac{x+y}{(x-y)^3}=\dfrac{x+y}{(y-x)^3}$.

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{(x-y)^2}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{y-x}-x\dfrac{1}{(y-x)^2}\right)=\dfrac{1}{(y-x)^2}+\dfrac{2x}{(y-x)^3}=\dfrac{x+y}{(y-x)^3}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}\right)$.

Donc $\omega$ est exacte sur l'ouvert $\Omega$. Soit $f$ une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall(x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{y}{(x-y)^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=\dfrac{y}{x-y}+g(y)\\ \dfrac{x}{(x-y)^2}+g'(y)=\dfrac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall(x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{y}{x-y}+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de $\omega$ sur $\Omega$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\dfrac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

**3)** $\omega$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in]-\infty,0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur $\Omega$, $\omega$ est exacte si et seulement si $\omega$ est fermée d'après le théorème de Schwarz.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc $\omega$ est exacte sur $\Omega$. Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\Omega$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)\\ \dfrac{y}{x^2+y^2}+g'(y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\dfrac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de $\omega$ sur $\Omega$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto \dfrac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de $\omega$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et donc $\omega$ est exacte sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

**4)** $\omega$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc $\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si $\omega$ est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de Schwarz.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{xy^2}\right)=\dfrac{1}{x^2y^2}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2y}\right)=-\dfrac{1}{x^2y^2}$. Donc $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{xy^2}\right)\neq\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2y}\right)$ et $\omega$ n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.

On cherche un facteur intégrant de la forme $h\ :\ (x,y)\mapsto g(x^2+y^2)$ où $g$ est une fonction non nulle de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right)=\dfrac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\dfrac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right)=-\dfrac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\dfrac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
h\omega \text{ est exacte sur } ]0,+\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \dfrac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\dfrac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)=-\dfrac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\dfrac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \dfrac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2)=0\\
&\Leftrightarrow \forall t>0,\ -tg'(t)+g(t)=0 \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t>0,\ g(t)=\lambda t.
\end{aligned}$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)dy=(x^2+y^2)\omega.$$

**n° 13 : 1)** Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y)=g(u,v)$ où $u=x+y$ et $v=x+2y$. L'application $(x,y)\mapsto(x+y,x+2y)=(u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un $C^1$-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v))=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial u}+2\dfrac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial u}=0\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v)\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y)\mapsto h(x+2y) \text{ où } h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

Par exemple, la fonction $(x,y)\mapsto\cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

**2)** Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Posons $f(x,y)=g(r,\theta)$ où $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$ est un $C^1$-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (r,\theta) \in ]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r)\\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

**3)** Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \rightarrow & ]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (u,uv) = (x,y) \end{array}$. Donc si on pose $f(x,y) = g(u,v)$, on a $g = f\circ\varphi$.

Soit $(x,y,u,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x \\ uv = y \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = \dfrac{y}{x} \end{array}\right. .$$

Ainsi, $\varphi$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \rightarrow & ]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left(x,\dfrac{y}{x}\right) = (u,v) \end{array}.$$

De plus, $\varphi$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que $\varphi$ est un $C^2$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g = f\circ\varphi$ et que $\varphi$ est un $C^2$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, $f$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si $g$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\ &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x,y)\in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall (u,v)\in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0$$

$$\Leftrightarrow \exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v)\in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=h(v)$$

$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v)\in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v)=uh(v)+k(v)$$

$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y)\in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y)=xh(xy)+k(xy).$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$ où $h$ et $k$ sont deux fonctions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

**n° 13 :** On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\|=\text{Max}\{\|h\|_2,\|k\|_2\}$.

• Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h))=(a+h).(b+k)=a.b+a.h+b.k+h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h))-f((a,b))=(a.h+b.k)+h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k)\neq(0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=|h.k|\leqslant\|h\|_2\|k\|_2\leqslant\|(h,k)\|^2,$$

et donc $\dfrac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|\leqslant\|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=0.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire, on en déduit que $f$ est différentiable en $(a,b)$ et que $\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k)=a.h+b.k$.
La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k)-a\wedge b-a\wedge h-b\wedge k\|_2=\frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a\wedge h+b\wedge k$ est linéaire, on en déduit que $g$ est différentiable en $(a,b)$ et que $\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k)=a\wedge h+b\wedge k$.

**n° 14 :** • Pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=\dfrac{\|x\|}{1+\|x\|}<\dfrac{\|x\|+1}{\|x\|+1}=1$. Donc $f$ est bien une application de $E$ dans $B$.

• Si $y=0$, pour $x\in E$, $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+\|x\|}x=0\Leftrightarrow x=0$.

Soit alors $y\in B\setminus\{0\}$. Pour $x\in E$,

$$f(x)=y\Rightarrow x=(1+\|x\|)y\Rightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ x=\lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de $y$ est nécessairement de la forme $\lambda y$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda y)=\dfrac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ et donc

$$\begin{aligned}f(\lambda y)=y&\Leftrightarrow\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}=1\Leftrightarrow\lambda=1+|\lambda|\|y\|\\&\Leftrightarrow(\lambda\geqslant0\text{ et }(1-\|y\|)\lambda=1)\text{ ou }(\lambda<0\text{ et }(1+\|y\|)\lambda=1)\\&\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{1-\|y\|}\ (\text{car }\|y\|<1).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, $y$ admet un antécédent par $f$ et un seul à savoir $x=\dfrac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f\text{ est bijective et }\forall x\in B,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x\mapsto\|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x\mapsto\dfrac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x\mapsto\dfrac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur $B$ pour les mêmes raisons. Donc les applications $f$ et $f^{-1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et $B$ respectivement et on a montré que

$$\boxed{\text{l'application } f: \begin{array}{rcl} E & \to & B \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+\|x\|} \end{array} \text{ est un homéomorphisme.}}$$

**n° 15 : 1ère solution.** Pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$. $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $i\in[\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}=\frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et pour $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $h\in\mathbb{R}^n$

$$df_x(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i=\frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^{n}x_ih_i=\frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

**2 ème solution.** Soit $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Pour $h\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2=\frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x\mapsto\|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\dfrac{1}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{\sim}\dfrac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2-\|x\|_2$ tend vers $0$ quand $h$ tend vers $0$. Ensuite, puisque $|(x|h)|\leqslant\|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), on a $x|h\underset{h\to0}{=}O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$.
Finalement, $\dfrac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2\underset{h\to0}{=}\|x\|_2+\frac{x|h}{\|x\|_2}+o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h\mapsto\dfrac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que $f$ est différentiable en tout $x$ de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $df_x(h)=\dfrac{x|h}{\|x\|_2}$.

Soit $L$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2-\|0\|_2-L(h))=1-L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers $0$ quand $h$ tend vers $0$. Pour $u$ vecteur non nul donné et $t$ réel non nul, l'expression $1-L\left(\dfrac{tu}{\|tu\|_2}\right)=1-\dfrac{t}{|t|}L\left(\dfrac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers $0$ quand $t$ tend vers $0$. Mais si $t$ tend vers $0$ par valeurs supérieures, on obtient $L(u)=\|u\|_2$ et si $t$ tend vers $0$ par valeurs inférieures, on obtient $L(u)=-\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u\neq0$. Donc $f$ n'est pas différentiable en $0$.

**n° 16 :** On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle $ABC$. Soit $M$ un point intérieur au triangle $ABC$. On note $I$, $J$ et $K$ les projetés orthogonaux de $M$ sur les droites $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ respectivement. On pose $u =$ aire de $MBC$, $v =$ aire de $MCA$ et $w =$ aire de $MAB$. On a

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathscr{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v) \mapsto uv(\mathscr{A} - u - v)$ sur le domaine

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0 \text{ et } u + v \leqslant \mathscr{A}\right\}.$$

$T$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :

- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u + v \leqslant \mathscr{A}$ et donc $T$ est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v) \mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v) \mapsto u + v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u + v \leqslant 0\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Puisque $T$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $T$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de Borel-Lebesgue.

$f$ est continue sur le compact $T$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc $f$ admet un maximum sur $T$.

Pour tout $(u,v)$ appartenant à la frontière de $T$, on a $f(u,v) = 0$. Comme $f$ est strictement positive sur $\overset{\circ}{T} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2/\ u > 0,\ v > 0 \text{ et } u + v < 0\}$, $f$ admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque $f$ est de classe $C^1$ sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $f$ admet un maximum en $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{T}$, $(u_0,v_0)$ est nécessairement un point critique de $f$. Soit $(u,v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A} - 2u - v) = 0\\ u(\mathscr{A} - u - 2v) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2u + v = \mathscr{A}\\ u + 2v = \mathscr{A}\end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque $f$ admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0) = \left(\dfrac{\mathscr{A}}{3},\dfrac{\mathscr{A}}{3}\right)$, $f$ admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0) = \dfrac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point $M$ intérieur au triangle $ABC$ aux cotés de ce triangle est donc $\dfrac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.

**Remarque.** On peut démontrer que pour tout point $M$ intérieur au triangle $ABC$, on a $M = \text{bar}\left((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } M\right.$
Si maintenant $M$ est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en $G$ l'isobarycentre du triangle $ABC$.

**n° 17 :** Soient $A$ et $B$ les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x,y)$ dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2 = MA + MB \geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc $f$ admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple $(x,y)$ de la forme $(\lambda a, (1-\lambda)a)$, $\lambda \in [0,1]$.

**n° 18 :** Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $g$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\,\mathrm{sh}(2y)}{\mathrm{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -2\cos(2x)\frac{2\,\mathrm{ch}^3(2y) - 4\,\mathrm{sh}^2(2y)\,\mathrm{ch}(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)\,\mathrm{sh}^2(2y)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}^3(2y)}(-\mathrm{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)(\mathrm{ch}^2(2y)-1)}{\mathrm{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\mathrm{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\mathrm{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant \dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)} \leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times)} = \cos(2x)$ décrit $[-1, 1]$ quand $x$ décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2\times)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = [-1, 1]$. Par suite,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application $f$ de classe $C^2$ sur $]-1, 1[$. Or $\left|\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \mathrm{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \in \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in ]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t \in ]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t \in ]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ \forall t \in ]-1,1[,\ f(t) = \lambda\,\mathrm{argth}\, t + \mu.\end{aligned}$$

De plus, $f$ n'est pas constante si et seulement si $\mu = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } t \mapsto \mathrm{argth}\, t \text{ convient.}}$$

**n° 19 :** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de $f$ en $(x, y)$ s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$ où $c$ et $s$ sont deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2 + s^2 = 1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions $c$ et $s$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ceci s'écrit encore $\dfrac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à $x$ ou à $y$, on obtient les égalités $c\dfrac{\partial c}{\partial x} + s\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c\dfrac{\partial c}{\partial y} + s\dfrac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y} \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications $c$ et $s$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe $\theta$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de $f$ en $(x,y)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Soit $g$ la rotation d'angle $\theta$ prenant la même valeur que $f$ en $(0,0)$. $f$ et $g$ ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et $f$ est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation.
Montrer que $f$ est une rotation affine.