SESSION 2003

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

I. Polynômes de Tchebychev

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)(i\sin(\theta))^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n} i^{2k}\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) + \sum_{0\leq 2k+1\leq n} i^{2k+1}\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) + i\sum_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}(\theta)\sin^{2k+1}(\theta)\right) \\
&= \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)\sin^{2k}(\theta) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k
\end{aligned}$$

Posons $T = \displaystyle\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k$. Alors pour tout réel θ

$$T(\cos\theta) = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}(\theta)(1-\cos^2(\theta))^k = \cos(n\theta).$$

Ceci démontre l'existence de T_n.

b) Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Alors pour tout réel θ, $P(\cos\theta) = \cos(n\theta) = T(\cos\theta)$ et donc $\forall x \in [-1,1],\ P(x) = T(x)$. Ainsi, les polynômes P et T coïncident en une infinité de valeurs et sont donc égaux. Ceci démontre l'unicité de T.

$$\boxed{T_n = \sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} (-1)^k\binom{n}{2k}X^{n-2k}(1-X^2)^k.}$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$T_n(x) + T_{n+2}(x) = T_n(\cos(\theta)) + T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2xT_{n+1}(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).}$$

Ainsi, les polynômes $T_n + T_{n+2}$ et $2XT_{n+1}$ coïncident en une infinité de valeurs . Ces polynômes sont donc égaux. On a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.}$$

b) On a immédiatement $T_0 = 1$ et $T_1 = X$. Puis $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$.

$$\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_2 = 2X^2 - 1 \text{ et } T_3 = 4X^3 - 3X.}$$

c) Montrons par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$.

- T_1 est un polynôme de degré 1 et de coefficent dominant $1 = 2^{1-1}$ et T_2 est un polynôme de degré 2 et de coefficent dominant $2 = 2^{2-1}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$ et $n = 2$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\deg(T_n) = n$, $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ et $\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Alors

$$\deg(T_{n+2}) = \deg(2XT_{n+1} - T_n) = \deg(XT_{n+1}) = 1 + (n + 1) = n + 2,$$

et

$$\mathrm{dom}(T_{n+2}) = \mathrm{dom}(2XT_{n+1} - T_n) = \mathrm{dom}(XT_{n+1}) = 2\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}.}$$

D'autre part, $T_0 = 1$ est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ de sorte que $x = \cos(\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $0 \leq k \leq n - 1$, on a

$$0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \frac{(2(n-1)+1)\pi}{2n} = \pi - \frac{\pi}{2n} \leq \pi.$$

Comme la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$, on en déduit que les n nombres $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont n réels deux à deux distincts, tous racines du polynôme T_n. Comme le polynôme T_n est de degré n, ces nombres sont toutes les racines de T_n, nécessairement toutes simples et dans $[-1, 1]$. Enfin, puisque $\mathrm{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, on a la factorisation

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - \cos(\theta_k)) \text{ où } \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1, 1]$, en posant $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$, on a

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1,$$

ce qui montre déjà que $\|T_n\|_\infty \leq 1$. Comme d'autre part

$$\|T_n\|_\infty \geq |T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1,$$

on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_\infty = 1.}$$

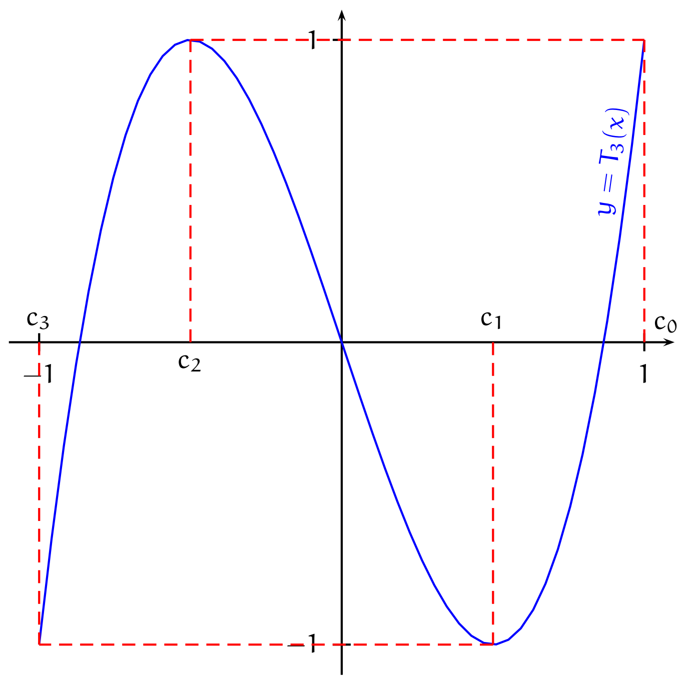
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $k \in [\![0, n]\!]$.

$$|T_n(c_k)| = |T_n(\cos(\frac{k\pi}{n}))| = |\cos(n \times \frac{k\pi}{n})| = |\cos(k\pi)| = 1.$$

Plus précisément, $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ et en particulier, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, (\forall k \in [\![0, n]\!],\ |T_n(c_k)| = \|T_n\|_\infty \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ T_n(c_{k+1}) = -T_n(c_k).}$$

c) $c_0 = \cos(0) = 1$ et $T_3(c_0) = 1$. $c_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $T_3(c_1) = -1$. $c_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $T_3(c_2) = 1$. $c_3 = \cos(\pi) = -1$ et $T_3(c_3) = -1$



II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

Orthogonalité des T_n

4. Soit $h \in E$. La fonction $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$. D'autre part, la fonction h est bornée au voisinage de 1 et au voisinage de -1. Par suite,

$$\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{h(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} \underset{x \to 1}{=} O(1) \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O((1-t)^{-1/2}),$$

et de même

$$\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{h(t)}{\sqrt{1-t}} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}} \underset{x \to 1}{=} O((1+t)^{-1/2}).$$

Comme $-\frac{1}{2} > -1$, les fonctions $t \mapsto (1-t)^{-1/2}$ et $t \mapsto (1+t)^{-1/2}$ sont intégrables au voisinage de 1 et -1 respectivement. Il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } h \text{ de } E, \text{ la fonction } t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est intégrable sur }]-1, 1[.}$$

5. a) Soit h une fonction positive de E telle que $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0$. Alors, la fonction $t \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1, 1[$, d'intégrale sur $]-1, 1[$ nulle. On sait alors que cette fonction est nulle et donc que $\forall t \in]-1, 1[$, $\frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ puis $\forall t \in]-1, 1[$, $h(t) = 0$. Mais alors le polynôme h a une infinité de racines et donc h est le polynôme nul.

b) • D'après la question 4., $\forall (f,g) \in E^2$, $< f, g >$ existe dans $\mathbb{R}$.
• $\forall (f,g) \in E^2$, $< f, g >=< g, f >$ et $< , >$ est une forme symétrique.
• Il est clair $\forall (f_1, f_2, g) \in E^3$, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $< \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g >= \lambda_1 < f_1, g > +\lambda_2 < f_2, g >$. $< , >$ est linéaire par rapport à sa première variable et donc bilinéaire par symétrie.
• $\forall f \in E$, $< f, f >= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale et de plus, d'après la question 5.a), $\forall f \in E$, $< f, f >= 0 \Leftrightarrow f = 0$. $< , >$ est donc une forme définie positive.

En résumé, $< , >$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E et donc

$$\boxed{< , > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

6. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $\theta = \text{Arccos}\, t$ de sorte que θ décrit $]0, \pi[$ en décroissant puis $d\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. On obtient

$$\begin{aligned} < T_n, T_m > &= \int_{-1}^{1} T_n(t) T_m(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\pi}^{0} T_n(\cos\theta) T_m(\cos\theta) \times (-d\theta) \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta))]\ d\theta. \end{aligned}$$

• Si $n \neq m$,

$$< T_n, T_m >= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta))}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0.$$

• Si $n = m$,

$$< T_n, T_n >= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos((2n)\theta) + 1]\ d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((2n)\theta)\ d\theta = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n \neq 0 \\ \pi \text{ si } n = 0 \end{array}\right. .$$

$$\boxed{< T_n, T_m >= \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \neq m \\ \dfrac{\pi}{2} \text{ si } n = m \neq 0 \\ \pi \text{ si } n = m = 0 \end{array}\right. .}$$

La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est en particulier une famille orthogonale de polynômes tous non nuls de degré au plus n et donc la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel E_n. Comme $\text{card}(T_k)_{0 \leq k \leq n} = n + 1 = \dim(E_n) < +\infty$. Cette famille est une base orthogonale de E_n.

$$\boxed{\text{La famille } (T_0, \dots, T_n) \text{ est une base orthogonale de } E_n.}$$

Polynôme de meilleure approximation quadratique

7. Soit $f \in E$.

a) E_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, < , >)$. L'existence et l'unicité de $t_n(f)$ est alors assurée par le théorème de la projection orthogonale.

b) Puisque $t_n(f) \in E_n$ et que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n, il existe une famille $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que

$$t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k T_k.$$

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on a alors

$$< t_n(f), T_i >= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k < T_k, T_i >= \lambda_i < T_i, T_i >= \lambda_i \|T_i\|^2 = \left\{\begin{array}{l} \pi\lambda_0 \text{ si } i = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\lambda_i \text{ si } i \neq 0 \end{array}\right. .$$

Maintenant, $< t_n(f), T_i > = < f, T_i > + < t_n(f) - f, T_i > = < f, T_i >$ car $t_n(f) - f$ est dans $E_n^{\perp}$ et on a montré que

$$\boxed{\forall f \in E,\ t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{\|T_k\|^2} T_k = \frac{1}{\pi}\left(< f, T_0 > T_0 + 2\sum_{k=1}^{n} < f, T_k > T_k\right).}$$

8. Soient $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque $t_n(f) \in E_n$ et $f - t_n(f) \in E_n^{\perp}$, on a

$$\begin{aligned}
(d_2(f, E_n))^2 &= \|f - t_n(f)\|_2^2 = < f - t_n(f), f - t_n(f) > = < f - t_n(f), f > - < f - t_n(f), t_n(f) > = < f - t_n(f), f > \\
&= < f - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{\|T_k\|^2} T_k, f > = < f, f > - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{\|T_k\|^2} < f, T_k > \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|^2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|^2}}.}$$

9. a) Soit n un entier naturel

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|^2} = \|f\|_2^2 - (d_2(f, E_n))^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|^2}$ positif est majorée. On sait alors que cette série converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k \geq 0} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|^2} \text{ est convergente.}}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{< f, T_n >^2}{\|T_n\|^2}$. Puisque la série de terme général u_n converge, on déduit en particulier que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais pour $n \geq 1$,

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt\right| = |< f, T_n >| = \sqrt{\frac{\pi}{2} u_n}.$$

et donc

$$\boxed{\forall f \in E,\ \lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = 0.}$$

Convergence en norme quadratique

10. a) Soit h un élément de E.

$$\|h\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \frac{h^2(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \leq \int_{-1}^{1} \frac{\|h\|_\infty^2}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \|h\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \|h\|_\infty^2 \left[\text{Arcsin}\, t\right]_{-1}^{1} = \pi\|h\|_\infty^2,$$

et donc

$$\boxed{\forall h \in E,\ \|h\|_2 \leq \sqrt{\pi}\|h\|_\infty.}$$

b) Puisque pour tout entier naturel n $E_n \subset E_{n+1}$, la suite $(d_2(f, E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. Etant positive et donc minorée par 0, cette suite est convergente.

La fonction f est continue sur le segment $[-1,1]$. D'après le théorème de Weirstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur $[-1,1]$ ou encore telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-P_n\|_\infty = 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $d_n = \text{Max}(\deg(P_n), 0)$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\|f - t_{d_n}(f)\|_2 = d_2(f, E_{d_n}) \le \|f - P_n\|_2 \le \sqrt{\pi}\|f - P_n\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-P_n\|_\infty = 0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\pi}\|f-P_{n_0}\|_\infty < \varepsilon$. Posons $N = d_{n_0}$. Pour $n \ge N$, on a (puisque la suite $(\|f - t_n(f)\|_2)$ est décroissante)

$$\|f - t_n(f)\|_2 \le \|f - t_{d_{n_0}}(f)\|_2 \le \|f - P_{n_0}\|_2 \le \sqrt{\pi}\|f - P_{n_0}\|_\infty < \varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}/\ \forall n\ge N,\ \|f-t_n(f)\|_2 < \varepsilon$ et donc que

$$\boxed{\forall f\in E,\ \lim_{n\to+\infty}\|f - t_n(f)\|_2 = 0.}$$

11. a) D'après 10)b), $\lim\limits_{n\to+\infty} d_2(f, E_n) = 0$ et donc d'après la question 8), $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f\|_2^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|^2} = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|^2}} = \|f\|_2$.

$$\boxed{\forall f\in E,\ \|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|^2}}.}$$

b) Soit $h\in E$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{h(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ <h,T_n>= 0$ et donc d'après a), $\|h\|_2 = 0$. Puisque $\|\ \|_2$ est une norme sur E, on en déduit que $h = 0$.

III. Polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev

Existence d'un PMA d'ordre n pour f

12. a) • Le polynôme nul est dans K ce qui montre que K est non vide.
• Soit $Q\in K$. $\|Q\|_\infty = \|Q - f + f\|_\infty \le \|Q - f\|_\infty + \|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty$. On en déduit que K est une partie bornée de E_n.
• Soit $N\ :\ \begin{array}{ccc}(E_n,\|\ \|_\infty) & \to & (\mathbb{R},|\ |)\\ P & \mapsto & \|P\|_\infty\end{array}$. On sait que N est une application continue et il en est de même de l'application $\varphi\ :\ P\mapsto N(f-P)$ (en tant que composée d'applications continues puisque l'application $P\mapsto f-P$ est 1-Lipschitzienne). Or $K = \varphi^{-1}([0,\|f\|_\infty])$. K est donc un fermé de l'espace vectoriel normé $(E_n,\|\ \|_\infty)$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

b) Puisque E_n est de dimension finie et que K est une partie fermée et bornée de E_n, le théorème de Borel-Lebesgue permet d'affirmer que K est une partie compacte de E_n.

$$\boxed{K \text{ est une partie compacte de } E_n.}$$

13. a) Puisque $K\subset E_n$ et que $K\neq\varnothing$, on a $d_\infty(f,E_n)\le d_\infty(f,K)$.

Réciproquement, puisque $0\in K$, on a déjà $d_\infty(f,K)\le\|f-0\|_\infty = \|f\|_\infty$. Ainsi, si Q est un élément de E_n tel que $\|f-Q\|_\infty > \|f\|_\infty$, on a alors $\|f-Q\|_\infty \ge d_\infty(f,K)$ et si Q est un élément de E_n tel que $\|f-Q\|_\infty\le\|f\|_\infty$, on a $Q\in K$ et donc aussi $\|f-Q\|_\infty\ge d_\infty(f,K)$. En résumé, $d_\infty(f,K)$ est un minorant de $\{\|f-Q\|_\infty,\ Q\in E_n\}$. Puisque $d_\infty(f,E_n)$ est le plus grand de ces minorants, on a donc $d_\infty(f,K)\le d_\infty(f,E_n)$.

On a montré que

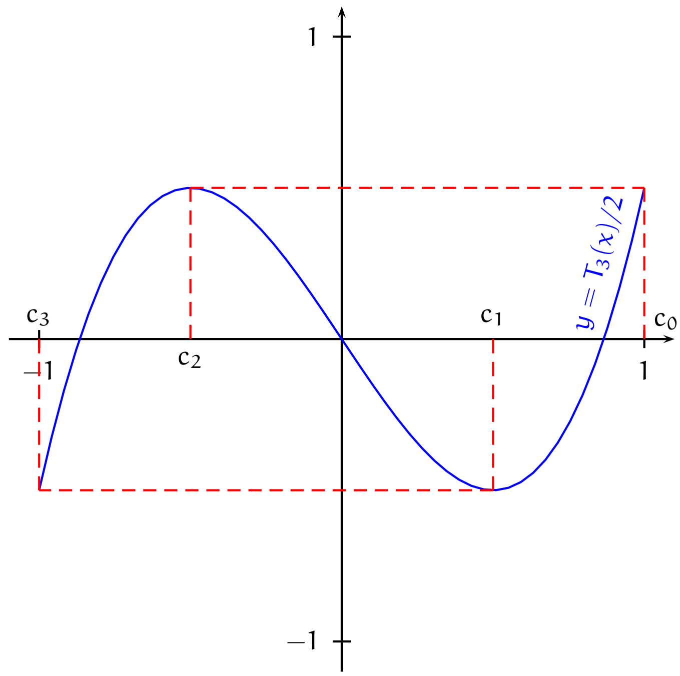
$$\boxed{d_\infty(f,E_n) = d_\infty(f,K).}$$

b) On a vu à la question 12.a) que la fonction $P\mapsto\|f-P\|_\infty$ est continue sur E_n. Elle admet donc un minimum sur le compact K et donc il existe $P\in K$ tel que $\|f-P\|_\infty = d_\infty(f,P)$. Comme $K\subset E_n$,

$$\boxed{\exists P\in E_n/\ \|f-P\|_\infty = d_\infty(f,P).}$$

Condition suffisante pour être un PMA

14. a) La fonction $\Phi = \dfrac{1}{2}T_3$ convient.



b) C'est le résultat de la question 3.b).

15. a) Soit $i \in [\![0, n+1]\!]$ tel que $f(x_i) - P(x_i) > 0$.

$$\begin{aligned} Q(x_i) - P(x_i) &= (Q(x_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - P(x_i)) = Q(x_i) - f(x_i) + |f(x_i) - P(x_i)| = (Q(x_i) - f(x_i)) + \|f - P\|_\infty \\ &\geq -|Q(x_i) - f(x_i)| + \|f - P\|_\infty \geq -\|f - Q\|_\infty + \|f - P\|_\infty > 0. \end{aligned}$$

De même, si $f(x_i) - P(x_i) < 0$,

$$\begin{aligned} Q(x_i) - P(x_i) &= (Q(x_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - P(x_i)) = Q(x_i) - f(x_i) - |f(x_i) - P(x_i)| = (Q(x_i) - f(x_i)) - \|f - P\|_\infty \\ &\leq |Q(x_i) - f(x_i)| - \|f - P\|_\infty \geq \|f - Q\|_\infty - \|f - P\|_\infty < 0. \end{aligned}$$

b) Le polynôme $Q - P$ est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et équioscille en les $n + 2$ points x_i, $0 \leq i \leq n + 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $Q - P$ s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n$, et donc en au moins $n+1$ réels deux à deux distincts de $[-1, 1]$. Ainsi $Q - P$ est un polynôme de degré au plus n qui a au moins $n + 1$ racines et donc $Q - P = 0$ ou encore $Q = P$.

Ceci contredit l'hypothèse $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$. On a donc montré que $\forall Q \in E_n$, $\|f - Q\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty$ et donc que $\|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)$ ou en fin que P est un PMA.

Détermination de PMA

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2.c), $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ et $\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2^n$. Par suite, $2^{-n}T_{n+1}$ est un polynôme unitaire de degré $n + 1$ et donc $q_n \in E_n$.

D'autre part, d'après la question 3.b) (ou 14.b)), $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$ equioscille en les $n + 2$ points $c_k = \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $0 \leq k \leq n + 1$.

La question 15. permet d'affirmer que

$$\boxed{q_n \text{ est un PMA d'ordre } n \text{ de } f.}$$

17. Soit P un polynôme unitaire de degré $n+1$. Pour $x \in [-1, 1]$ posons $f(x) = x^{n+1}$ puis $Q(x) = f(x) - P(x) = x^{n+1} - P(x)$. Puisque P est un polynôme unitaire de degré $n + 1$, Q est un élément de E_n et par suite $\|f - q_n\|_\infty \leq \|f - Q\|_\infty$ ce qui s'écrit encore $2^{-n}\|T_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.

18. a) Soit f un polynôme de degré $n+1$. Alors $\dfrac{f}{\text{dom}(f)}$ est un polynôme de degré $n+1$ unitaire. Pour tout polynôme $Q \in E_n$, $\dfrac{1}{\text{dom}(f)}(f-Q)$ est encore un polynôme unitaire de degré $n+1$. Maintenant, $\|f-Q\|_\infty$ est minimum si et seulement si $\dfrac{1}{\text{dom}(f)}\|f-Q\|_\infty = \|\dfrac{1}{\text{dom}(f)}(f-Q)\|_\infty$ est minimum. Mais puisque $\dfrac{1}{\text{dom}(f)}(f-Q)$ est unitaire de degré $n+1$, la question 17. permet d'affirmer que ce minimum est atteint quand $\dfrac{1}{\text{dom}(f)}(f-Q) = 2^{-n}T_{n+1}$ ou encore quand $Q = f - 2^{-n}\text{dom}(f)T_{n+1}$ (qui est bien un élément de E_n).

$$\boxed{\text{Un PMA d'ordre } n \text{ de } f \text{ est } f - 2^{-n}\text{dom}(f)T_{n+1}.}$$

b) D'après la question a), un PMA d'ordre 2 de f est

$$f - 2^{-2} \times 5 \times T_3 = (5X^3 + 2X - 3) - \frac{5}{4}(4X^3 - 3X) = \frac{23}{4}X - 3.$$

