

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1996

MATHÉMATIQUES

**DEUXIÈME ÉPREUVE**

**OPTION M**

**(Durée de l'épreuve: 4 heures)**

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie: MATHÉMATIQUES II - M.*

Nombres algébriques et nombres transcendants.

Dans tout le problème  $K$  est un sous-corps du corps des réels  $\mathbb{R}$  et  $K[X]$  le  $K$ -espace vectoriel des polynômes sur  $K$ . Par définition, un réel  $\alpha$  est *algébrique sur le corps  $K$*  si et seulement si le réel  $\alpha$  est racine d'un polynôme  $P$ , autre que le polynôme nul, appartenant à  $K[X]$ . Dans le cas contraire, le réel  $\alpha$  est *transcendant sur le corps  $K$* .

Le but de ce problème est d'établir des propriétés simples des nombres algébriques et transcendants sur un corps  $K$ , d'en donner des exemples lorsque le corps  $K$  est celui des rationnels puis d'appliquer les résultats obtenus pour caractériser des figures géométriques constructibles « à la règle et au compas ».

### Partie I

Soient  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$  et  $\alpha$  un réel algébrique sur le corps  $K$ ; désignons par  $\mathcal{I}(\alpha)$  l'ensemble des polynômes  $P$  appartenant à  $K[X]$  qui admettent  $\alpha$  comme racine:

$$\mathcal{I}(\alpha) = \{P \mid P \in K[X], P(\alpha) = 0\}.$$

**I-1)  $\mathcal{I}(\alpha)$  est un idéal de  $K[X]$ :**

- a)** Démontrer que  $\mathcal{I}(\alpha)$  est un idéal de  $K[X]$ . En déduire l'existence d'un polynôme  $M_\alpha$  unitaire (le coefficient du terme de  $M_\alpha$  de plus haut degré est égal à 1) unique tel que  $\mathcal{I}(\alpha)$  soit l'ensemble des polynômes de  $K[X]$  proportionnels à  $M_\alpha$  dans  $K[X]$ , soit:  $\mathcal{I}(\alpha) = \{P \mid \exists Q \in K[X], P = M_\alpha \cdot Q\}$ .
- b)** Démontrer que, pour qu'un polynôme  $P$ , appartenant à  $K[X]$ , unitaire et irréductible dans  $K[X]$ , soit le polynôme  $M_\alpha$  il faut et il suffit que le réel  $\alpha$  soit racine du polynôme  $P$ .

Par définition le polynôme  $M_\alpha$  est le *polynôme minimal* de  $\alpha$  sur  $K$ , le degré du polynôme  $M_\alpha$ , noté  $d(\alpha, K)$ , est le *degré* de  $\alpha$  sur  $K$ . Soit  $K[\alpha]$  le  $K$ -espace vectoriel engendré par la famille des réels  $1, \alpha, \dots, \alpha^q, \dots$ :  $K[\alpha] = \{x \mid x = \sum_{p=0}^q x_p \alpha^p, q \in \mathbb{N}, x_p \in K\}$ . Il est admis que l'ensemble  $K[\alpha]$  est, pour les lois de composition somme et produit, un anneau.

**I-2) Le degré de  $\alpha$  sur  $K$  est égal à 1:**

Le réel  $\alpha$  et le corps  $K$  étant donnés, démontrer l'équivalence entre les affirmations suivantes:  
i/ le réel  $\alpha$  appartient à  $K$ , ii/ le degré de  $\alpha$  sur  $K$  est égal à 1; iii/  $K[\alpha]$  est égal à  $K$ .

**I-3) Dans cette question le degré de  $\alpha$  sur  $K$  est égal à 2:**

- a)** Préciser la dimension de  $K[\alpha]$ ; démontrer que  $K[\alpha]$  est un corps.

- b) Démontrer qu'il existe un réel  $k$  ( $k > 0$ ) appartenant au corps  $K$  tel que les deux corps  $K[\alpha]$  et  $K[\sqrt{k}]$  soient égaux.

Par définition, dans ce cas ( $d(\alpha, K) = 2$ ),  $K[\alpha]$  est une extension quadratique de  $K$ .

**I-4) Dans cette question le degré de  $\alpha$  sur  $K$  est égal à un entier  $n \geq 2$ :**

- a) Démontrer qu'à tout réel  $x$  appartenant à l'espace vectoriel  $K[\alpha]$  est associé de manière unique un polynôme  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  appartenant à  $K[X]$  tel que:  $x = R(\alpha)$ . En déduire une base du  $K$ -espace vectoriel  $K[\alpha]$  et sa dimension.
- b) Démontrer que, pour tout réel  $x$  (différent de 0) de  $K[\alpha]$ , le polynôme  $\mathbb{R}$  ainsi associé est premier avec le polynôme minimal  $M_\alpha$ . En déduire l'existence d'un polynôme  $U$  de  $K[X]$  tel que la relation  $U(\alpha).R(\alpha) = 1$  ait lieu.
- c) Démontrer que l'anneau  $K[\alpha]$  est un corps.
- d) Démontrer que l'ensemble  $K[\alpha]$  est le plus petit corps admettant  $\alpha$  comme élément, contenant  $K$  et contenu dans  $\mathbb{R}$  ( $\alpha \in K[\alpha], K \subset K[\alpha] \subset \mathbb{R}$ ).

Le corps  $K$  est maintenant le corps des rationnels  $\mathbb{Q}$ . Considérons la suite des polynômes définis, pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $n$ , par les relations:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = 2x + 1, P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Soit  $Q_n$  le polynôme défini par la relation  $Q_n(x) = P_n(\frac{x}{2})$ .

**I-5) Propriétés générales des polynômes  $P_n$ :**

- a) Déterminer le degré du polynôme  $P_n$ ,  $n \geq 0$ ; préciser le coefficient du terme de plus haut degré et le terme constant. Déterminer les polynômes:  $P_2, P_3, P_4$ . Démontrer que les coefficients des polynômes  $Q_n$  (pour  $n \geq 0$ ) sont des entiers relatifs.
- b) Démontrer que les seules racines rationnelles possibles du polynôme  $Q_n$  sont les entiers 1 et  $-1$ . Exprimer l'expression  $Q_{n+3}(x) + xQ_n(x)$  en fonction du polynôme  $Q_{n+1}(x)$ . En déduire que les racines rationnelles éventuelles des polynômes  $Q_{n+3}$  et  $Q_n$  sont les mêmes. Préciser les polynômes  $P_n$  qui ont une racine rationnelle.

**I-6) Racines du polynôme  $P_n$ :**

Soit  $\theta$  un réel donné compris strictement entre 0 et  $\pi$  ( $0 < \theta < \pi$ ). Considérons la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par la donnée de  $u_0$  et de  $u_1$  et la relation de récurrence:

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} \cos \theta - u_n.$$

- a) Déterminer l'expression du terme général  $u_n$  de la suite ci-dessus en fonction des réels  $n$ ,  $\theta$  et de deux scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  déterminés par  $\theta$ ,  $u_0$  et  $u_1$ .
- b) Utiliser les résultats précédents pour exprimer le réel  $v_n = P_n(\cos \theta)$  en fonction des réels  $n$  et  $\theta$ . En déduire toutes les racines du polynôme  $P_n$  notées  $x_{k,n}$ ,  $1 \leq k \leq n$ .
- c) Démontrer que les trois nombres réels  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ ,  $\cos(\frac{2\pi}{7})$  et  $\cos(\frac{2\pi}{9})$  sont algébriques sur  $\mathbb{Q}$ . Déterminer leur polynôme minimal.

**I-7) Dans cette question le réel  $\alpha$  est le nombre algébrique sur  $\mathbb{Q}$ ,  $\cos(\frac{2\pi}{9})$ :**

- a) Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel  $Q[\alpha]$  est 3 et qu'une de ses bases est  $B = (1, \alpha, \alpha^2)$ . Donner l'expression dans cette base des réels  $\cos(\frac{4\pi}{9})$ ,  $\cos(\frac{8\pi}{9})$ .
- b) Soit  $f$  un endomorphisme non nul de l'espace vectoriel  $Q[\alpha]$ ; supposons que, pour tout couple de réels  $x$  et  $y$  appartenant à  $Q[\alpha]$ , la relation  $f(x.y) = f(x).f(y)$  ait lieu.  
Déterminer les différentes images possibles des réels 1 et  $\alpha$  dans la base  $B$ . En déduire que l'ensemble de ces endomorphismes est, pour la loi de composition des endomorphismes, un groupe à trois éléments  $f_1, f_2, f_3$ . Déterminer les matrices associées à ces endomorphismes  $f_1, f_2, f_3$  dans la base  $B$ .

### I-8) Exemple de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$ :

Soit  $S$  un polynôme, appartenant à  $\mathbb{Q}[X]$ , de degré  $n \geq 2$ , irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .

a) Démontrer qu'il existe un entier naturel  $C_S$  (différent de 0) tel que pour tout rationnel  $r = \frac{p}{q}$  (le couple  $(p, q)$  appartenant à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ) il vienne:  $|S(r)| \geq \frac{1}{C_S q^n}$ .

b) Supposons que le réel  $\alpha$  soit une racine de  $S$ . Déduire du résultat précédent l'existence d'une constante  $K$ , strictement positive, telle que pour tout rationnel  $r = \frac{p}{q}$  appartenant à l'intervalle  $[\alpha - 1, \alpha + 1]$ , l'inégalité  $|\alpha - r| \geq \frac{K}{q^n}$  ait lieu.

c) Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des réels définis par la relation:  $t_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}$ ,  $n \geq 0$ .

Démontrer que la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente; soit  $t$  sa limite. Établir l'inégalité:  $|t - t_n| \leq 2.10^{-(n+1)!}$ . En déduire que le réel  $t$  est transcendant sur  $\mathbb{Q}$ .

## Seconde partie

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats précédents pour caractériser les points du plan qui peuvent être construits « à la règle et au compas ».

Soit  $P$  un plan affine euclidien orienté. Considérons un repère orthonormé  $Oxy$  et  $K$  un sous-corps du corps des réels  $\mathbb{R}$ ; posons:

- $\mathcal{K}$  est l'ensemble des points du plan  $P$  dont chaque coordonnée appartient au corps  $K$ .
- $\mathcal{D}$  est l'ensemble des droites du plan  $P$  qui joignent deux points de  $\mathcal{K}$ .
- $\mathcal{C}$  est l'ensemble des cercles du plan  $P$  centrés en un point de  $\mathcal{K}$  et de rayon égal à la distance de deux points de  $\mathcal{K}$ .

### II-1) Intersection de droites et de cercles appartenant à $\mathcal{D}$ ou à $\mathcal{C}$ :

Démontrer les résultats suivants:

- Toute droite appartenant à  $\mathcal{D}$  et tout cercle appartenant à  $\mathcal{C}$  admettent au moins une équation cartésienne dont les coefficients sont dans  $K$ .
- Le point commun à deux droites sécantes de  $\mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .
- Un point commun à une droite de  $\mathcal{D}$  et à un cercle de  $\mathcal{C}$  est soit un point de l'ensemble  $\mathcal{K}$ , soit un point dont chaque coordonnée appartient à une extension quadratique de  $K$ .

Que dire d'un point commun à deux cercles de  $\mathcal{C}$  ?

*Points et réels constructibles:*

i/ Soit  $E$  un ensemble fini de points du plan  $P$ . Considérons toutes les droites passant par deux points de  $E$  et tous les cercles centrés en un de ces points de rayon égal à la distance de deux points quelconques de  $E$ . Les points d'intersection de ces droites et cercles deux à deux sont dits « *points construits à partir de  $E$  à la règle et au compas* » ou brièvement « *construits à partir de  $E$*  ».

ii/ Considérons deux points  $O$  et  $I$  du plan  $P$ . Un point  $M$  du plan  $P$  est dit « *constructible* » à partir des points  $O$  et  $I$  s'il existe une suite finie de points  $M_1, M_2, \dots, M_n = M$  telle que:

- $M_1$  soit construit à partir de l'ensemble des deux points  $O$  et  $I$ ,
- $M_i$ , pour  $2 \leq i \leq n$ , soit construit à partir de l'ensemble  $\{O, I, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}\}$ .

iii/ Dans la suite seuls le point  $O$  et le point  $I$  de l'axe  $Ox$  sont donnés; l'abscisse du point  $I$  est égale à 1; tout point  $M$  « *constructible à partir des points  $O$  et  $I$*  » est dit brièvement « *constructible* ».

iv/ Un réel est dit « *constructible* » s'il est égal à l'abscisse d'un point constructible de l'axe  $Ox$  ou à l'ordonnée d'un point constructible de l'axe  $Oy$ .

### II-2) Exemples de points construits et de points et réels constructibles:

Démontrer, en justifiant un dessin effectué à l'aide d'une règle et d'un compas, les propriétés suivantes:

a) Soit  $E$  un ensemble de trois points  $A, B, C$  du plan  $P$  tels que ces points sont deux à deux distincts et ne sont pas alignés. Démontrer que le quatrième sommet  $D$  du parallélogramme  $ABCD$  est un « point construit » à partir de l'ensemble  $E$ .

En déduire que si  $A$  et  $\Delta$  sont un point et une droite du plan  $P$  donnés, la droite parallèle à la droite  $\Delta$  passant par  $A$  peut être construite « à la règle et au compas ».

b) • Démontrer que le point  $J$  symétrique du point  $I$  par rapport à  $O$  est constructible ainsi que le point  $K$  porté par l'axe  $Oy$  d'ordonnée égale à 1. Il est admis que tout point dont les coordonnées sont des entiers relatifs, est constructible.

• Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs constructibles; démontrer que les réels  $\alpha + \beta$ ,  $\frac{\alpha}{\beta}$  et  $\alpha \cdot \beta$  sont constructibles.

• Soit  $\alpha$  un réel strictement positif constructible; démontrer que  $\sqrt{\alpha}$  est constructible (on pourra considérer le cercle dont un diamètre est le segment joignant le point  $J$  au point  $A(\alpha, 0)$ ).

Une suite finie  $(K_i)_{0 \leq i \leq n}$ , de sous-corps du corps des réels est dite avoir la propriété  $(P)$  si les deux relations ci-dessous ont lieu:

$$(P1) \quad \mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n,$$

$$(P2) \quad \text{Pour tout entier } i, 1 \leq i \leq n, \text{ le corps } K_i \text{ est une extension quadratique du corps } K_{i-1}.$$

### II-3) Une condition nécessaire et suffisante de constructibilité:

a) Soit  $M$  un point constructible; démontrer qu'il existe une suite finie  $(K_i)_{0 \leq i \leq n}$ , de sous-corps du corps des réels  $\mathbb{R}$  ayant la propriété  $(P)$  et telle que les coordonnées de  $M$  appartiennent au corps  $K_n$ .

b) Soit une suite finie  $(K_i)_{0 \leq i \leq n}$  ayant la propriété  $(P)$ ; démontrer par récurrence que tous les points  $M$  du plan dont les coordonnées appartiennent au corps  $K_n$  sont constructibles.

### II-4) Une condition nécessaire de constructibilité:

a) Soient  $F, G$  et  $H$  trois sous-corps du corps des réels  $\mathbb{R}$  tels que les inclusions  $F \subset G \subset H$  aient lieu. Faisons les hypothèses:  $G$  est un  $F$ -espace vectoriel,  $H$  un  $G$ -espace vectoriel, leurs dimensions sont finies et respectivement égales aux entiers  $q$  et  $r$ . Démontrer que  $H$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie. Préciser sa dimension.

b) Considérons une suite finie  $(K_i)_{0 \leq i \leq n}$  de sous-corps du corps des réels ayant la propriété  $(P)$ ; quelle est la dimension du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $K_n$  ?

c) En déduire que, si le réel  $\alpha$  est constructible, le degré  $d(\alpha, \mathbb{Q})$  est une puissance de l'entier 2.

Note historique: Les Grecs furent embarrassés lorsque la Pythie leur demanda un autel deux fois plus grand dans le temple d'Apollon à Delphes; la racine cubique de 2 n'est pas constructible !

### II-5) Polygones réguliers constructibles:

Considérons les polygones réguliers à  $n$  côtés ( $3 \leq n \leq 10$ ) inscrits dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Désignons par  $A_1, A_2, \dots, A_n$  leurs sommets. Supposons le premier sommet  $A_1$  confondu avec le point  $I$ . L'abscisse du deuxième sommet  $A_2$  est égale à  $\cos(\frac{2\pi}{n})$ .

Quels sont, parmi les polygones réguliers à  $n$  côtés ( $3 \leq n \leq 10$ ) inscrits dans le cercle de centre  $O$  et de rayon 1, ceux qui sont constructibles ?