La formule de STIRLING

1) On commence par la présentation classique d'une épreuve de concours où on ne découvre pas le résultat :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite un réel strictement positif K. Pour cela, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$ puis $w_n = v_{n+1} - v_n$.

• On calcule w_n :

$$\begin{aligned}
w_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \frac{1}{2}\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)\right) \\
&= \ln(n+1) - \left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)\right)) + 1 = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

• On montre que la série numérique de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge :

$$\begin{aligned}
w_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, la série numérique de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

• On en déduit la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:
On sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$ sont de même nature. Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un certain réel ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{v_n}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel strictement positif $K = e^{\ell}$.

Puisque K n'est pas nul, on en déduit que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Maintenant, on peut découvrir le résultat précédent patiemment à l'aide des règles de sommation des relations de comparaison. C'est ce qu'on fait dans le paragraphe 2).

2) a) Equivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On a $\ln(k-1) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \leqslant \ln k$. Puisque $\ln(k-1) \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln k$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln x \, dx \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln k \geqslant 0.$$

Comme la série de terme général $\ln k$ diverge, la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes positifs divergentes permet d'affirmer que, quand n tend vers $+\infty$,

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln x \, dx = \int_{1}^{n} \ln x \, dx = n\ln n - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n.$$

Donc,

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n + o(n\ln n) \text{ ou encore } n! \underset{n\to+\infty}{=} n^n \times e^{o(n\ln n)}.$$

2) b) Equivalent de Ln(n !)-nLnn .

Pour $n \geqslant 1$, posons $u_n = \ln(n!) - n\ln n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n$.

$$u_{n+1}-u_n=\ln(n+1)-((n+1)\ln(n+1)-n\ln n)=-n(\ln(n+1)-\ln n)=-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-1.$$

D'après la règle de l'équivalence des sommes partielles de séries à termes de signe constant à partir d'un certain rang, divergentes, on a :

$$u_n-u_1=\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)=-(n-1),$$

ce qui fournit $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n-u_1\underset{n\to+\infty}{\sim}-(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}-n$.

$$\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n-n+o(n)\text{ ou encore }n!\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{n}{e}\right)^n\times e^{o(n)}.$$

2) c) Equivalent de Ln(n !)-nLnn+n .

Pour $n\geq 1$, posons $u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n+n$. Quand n tend vers $+\infty$

$$u_{n+1}-u_n=\ln(n+1)-((n+1)\ln(n+1)-n\ln n)+1=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

Donc, la série de terme général u_n étant toujours divergente et u_n étant de signe constant pour n grand

$$u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}u_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln(n-1)\text{ (d'après l'étude de la série harmonique)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}\ln(n).$$

Donc

$$\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n)\text{ ou encore }n!\underset{n\to+\infty}{=}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\times e^{o(\ln n)}.$$

2) d) Convergence de la suite $\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

Pour $n\geqslant 1$, posons $u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{=}1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\&\underset{n\to+\infty}{=}1-1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge et on sait qu'il en est de même de la suite (u_n).
Soit $\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n$. Alors, $\ln(n!)-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n\underset{n\to+\infty}{=}\ell+o(1)$ et donc,

$$\exists\ell\in\mathbb{R}/\ \ln(n!)\underset{n\to+\infty}{=}n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\ell+o(1)\text{ ou encore, }\exists K\in]0,+\infty[/\ n!\underset{n\to+\infty}{\sim}K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\text{ (en posant }K=e^\ell).$$

3) Détermination de K et formule de Sirling.

L'étude des intégrales de Wallis (à savoir $W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\ dt$, $n\in\mathbb{N}$) montre que

- d'une part, pour tout entier naturel n, $W_{2n}=\frac{\pi}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}$
- d'autre part, quand n tend vers $+\infty$, $W_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

D'après 4), on a alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}W_{2n}=\frac{\pi}{2}\times\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}\times\frac{K\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{K^2 2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}n}=\frac{1}{K}\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

et donc $\dfrac{1}{K}\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ou encore $K = \sqrt{2\pi}$. On a ainsi montré que

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ (formule de Stirling).}}$$

4) Equivalent de $\ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n - \ln(\sqrt{2\pi})$.

D'après ce qui précède, si pour $n \geq 1$, $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{1}{2}\ln n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1)$ avec $\ell = \ln K = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Comme $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ln(\sqrt{2\pi}) = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k)$ puis, pour $n \geq 1$:

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) - \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right).$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

La règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes permet d'affirmer que

$$u_n - \ln(\sqrt{2\pi}) = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{12n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou encore

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).}$$