

# La série harmonique

Pour  $n$  naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1)  $H_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pour  $n \geq 1$ ,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante et admet ainsi une limite dans  $] -\infty, +\infty]$ . Ensuite, pour  $n \geq 1$ ,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  converge vers un certain réel  $\ell$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$ . Ceci est absurde et on en déduit que la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge. Finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty,$$

ou encore, la série harmonique diverge.

2) **Equivalent de  $H_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$**

Soit  $n \geq 2$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$ . On en déduit que

$$\text{pour } k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \text{ et pour } k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1) \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n.$$

Ces inégalités restent vraies pour  $n = 1$  et donc

$$\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

et en particulier

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$$

d'après le théorème des gendarmes car  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$  avec  $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$  et  $1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

3) **Convergence de la suite  $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .**

Pour  $n \geq 1$ , posons  $u_n = H_n - \ln n$ .

1ère étude. Soit  $n \geq 1$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Or la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  et donc sur  $[n, n+1]$ . Par suite, pour  $t \in [n, n+1]$ ,  $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \leq 0$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc décroissante.

De plus, d'après 2), pour  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq \ln(n+1) - \ln n \leq H_n - \ln n = u_n \leq (1 + \ln n) - \ln n = 1,$$

et donc, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n \in [0, 1]$ . Ainsi, la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0 et donc converge vers un certain réel positif noté  $\gamma$ . Enfin, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ , par passage à la limite, on a  $\gamma \in [0, 1]$ .

la suite  $(H_n - \ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel de  $[0, 1]$  noté  $\gamma$ .  $\gamma$  s'appelle la constante d'EULER.

**2ème étude.** Pour  $n \geq 1$ , on pose aussi  $v_n = H_n - \ln(n+1)$ . On a

- pour  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} - u_n = -(\ln(n+1) - \ln n) = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 0$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \int_{n+1}^{n+2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt \geq 0$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
- $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

On en déduit que les suites  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune à savoir  $\gamma$ , la constante d'EULER. En particulier, puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  décroît vers  $\gamma$  et que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  croît vers  $\gamma$ , on a

$$\forall n \geq 1, \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1) \leq \gamma \leq \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n.$$

**3ème étude.** Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge. Maintenant, on sait que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de même nature que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$ . On retrouve ainsi la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Comme  $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k+1} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right)$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on

obtient  $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right)$ . En résumé

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \right).$$

#### 4) Valeurs approchées de $\gamma$ .

On a vu précédemment que pour  $n \geq 1$ ,  $v_n \leq \gamma \leq u_n$  avec  $u_n - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  et donc

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \gamma - v_n \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Par suite,

$$0 \leq \gamma - v_n \leq \frac{10^{-3}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{10^{-3}}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{0,0005} - 1} \Leftrightarrow n \geq 1999,5 \dots \Leftrightarrow n \geq 2000.$$

Ainsi, la valeur exacte de  $v_{2000}$  est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $\frac{10^{-3}}{2}$  près. Mais alors une valeur approchée  $\alpha$  de  $v_{2000}$  à  $\frac{10^{-3}}{2}$  près de  $v_{2000}$  est une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-3}$  près car

$$|\gamma - \alpha| \leq |\gamma - v_{2000}| + |v_{2000} - \alpha| \leq \frac{10^{-3}}{2} + \frac{10^{-3}}{2} = 10^{-3}.$$

On calcule donc à la machine  $v_{2000}$  arrondi à la troisième décimale la plus proche et on obtient

$$\gamma = 0,577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

### 5) Equivalent de $H_n - \ln n - \gamma$ .

Pour  $n \geq 2$ , d'après le calcul fait à la fin de 3),

$$H_n - \ln n - \gamma = \left(1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1}\right)\right) - \left(1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1}\right)\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , on a

$$\begin{aligned} \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} &= -\ln \frac{k-1}{k} - \frac{1}{k} = -\ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

D'après la règle de l'équivalence des restes de séries à termes positifs convergentes, on a alors

$$H_n - \ln n - \gamma \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2n} \text{ (série télescopique).}$$

Donc,  $H_n - \ln n - \gamma \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$  ou encore

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$