

$$\text{Calcul de } \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

1) Une expression de $\frac{1}{n^2}$ sous forme intégrale.

On cherche des réels a et b tels que $\forall n \geq 1, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux intégrations par parties fournissent

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt &= \left[(at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) \sin(nt) dt = \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) (-\sin(nt)) dt \\ &= \frac{1}{n} \left(\left[(2at + b) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (2a) \frac{\cos(nt)}{n} dt \right) \\ &= \frac{1}{n^2} ((2a\pi + b)(-1)^n - b) - \frac{2a}{n^2} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n (2a\pi + b) - b}{n^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, si les réels a et b vérifient $2a\pi + b = 0$ et $-b = 1$ ou encore si $b = -1$ et $a = \frac{1}{2\pi}$, alors

$\forall n \geq 1, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt.$$

2) Expression de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ sous forme intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. D'après 1),

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt.$$

3) Calcul de $C_n = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

1er calcul. Soit t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right).$$

- Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors chaque $\cos(kt)$ vaut 1 et dans ce cas, $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = n$.
- Si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{it} \neq 1$ et dans ce cas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right) = \operatorname{Re} \left(e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i(1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2})t} \frac{e^{-int/2} - e^{int/2}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right) = \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} \right) \cos \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} = \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)t}{2} \right) - \sin \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\frac{(2n+1)t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \varphi_n(t) \text{ où } \varphi_n(t) = \begin{cases} n + \frac{1}{2} & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

2ème calcul. Soient t un réel et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right) \\ &= \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ (somme télescopique)}. \end{aligned}$$

et pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on retrouve $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

4) Nouvelle expression de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

φ_n est continue sur $[0, \pi]$ (car pour tout t de $[0, \pi]$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$) et d'après ce qui précède, et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(-\frac{1}{2} + \varphi_n(t)\right) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \varphi_n(t) dt \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \varphi_n(t) dt. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $t \in]0, \pi]$, $\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \varphi_n(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$. Pour $t \in]0, \pi]$, on pose alors $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

f est continue sur $]0, \pi]$. De plus, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \frac{-t}{2 \times \frac{t}{2}} = -1$. f se prolonge donc par continuité en 0 en posant

$f(0) = -1$. En résumé,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \text{ où } f(t) = \begin{cases} \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Il reste à étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'expression précédente, f étant continue sur $[0, \pi]$.

5) Le lemme de LEBESGUE. Il s'agit de montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$ et donc aussi $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

a) Cas des fonctions de classe C^1 .

Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Une intégration par parties, licite puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, fournit pour $\lambda > 0$

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{i\lambda} \left([f(t)e^{i\lambda t}]_a^b - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t} dt \right) = \frac{1}{i\lambda} \left(f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b f'(t)e^{i\lambda t} dt \right),$$

et donc, pour $\lambda > 0$

$$\left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$ ce qui démontre le lemme de LEBESGUE pour les fonctions de classe C^1 sur un segment.

b) Cas des fonctions continues par morceaux.

On a d'abord $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} = 0$ ce qui démontre le lemme de LEBESGUE quand f est la fonction constante 1.

Mais alors, par linéarité de l'intégrale puis additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, le lemme de LEBESGUE est démontré pour les fonctions en escaliers sur $[a, b]$.

Soit maintenant f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe g une fonction en escaliers sur $[a, b]$ telle que $\forall t \in [a, b], |f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (approximation uniforme sur un segment d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escaliers).

Pour $\lambda > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t))e^{i\lambda t} dt + \int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt + \left| \int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque g est en escaliers sur $[a, b]$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour $\lambda \geq \lambda_0$, $\left| \int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_0 > 0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon)$ et donc

Lemme de LEBESGUE pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0,$$

les deux dernières limites étant obtenues par passage aux parties réelles et imaginaires.

6) Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

La fonction f définie en 4) est continue sur $[0, \pi]$ et d'après le lemme de LEBESGUE, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0$.

Le 5)b) montre alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

7) Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Posons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. On a $S - S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2}S$ et donc

$$S' = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12}. \text{ On a aussi } S + S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n^2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \text{ et donc } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{2}(S + S') = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$