**Concours commun Mines-Ponts**

PREMIÈRE EPREUVE. FILIÈRE MP

---

# A. Équations algébriques réciproques

**1)** • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$u_n(P)(X) = X^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k.$$

$u_n(P)(X)$ est effectivement un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. On a montré que $u_n$ est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
• Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$u_n^2(P)(X) = X^n u_n(P)\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \frac{1}{X^n} P\left(\frac{1}{1/X}\right) = P(X).$$

Donc $u_n^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et on a monté que $u_n$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$.

**2)** Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors $u_n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$ puis par identification des coefficients

$$P \in \mathscr{P} \text{ (resp. } \mathscr{D}) \Leftrightarrow u_n(P) = P \text{ (resp } u_n(P) = -P) \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_{n-k} = a_k \text{ (resp. } \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_{n-k} = -a_k).$$

**3)** • Soit $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$. Alors $R \neq 0$ et il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $u_n(R) = \varepsilon R$.
Soit $x$ un réel non nul.

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon R(x) = 0 \Leftrightarrow u_n(R)(x) = 0 \Leftrightarrow x^n R\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow R\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Donc $x$ est racine de $R$ si et seulement si est racine de de $R$.
• Soit $R \in \mathscr{D}$. Notons $n$ le degré de $R$. Pour tout réel $x$ non nul,

$$x^n R\left(\frac{1}{x}\right) = -R(x).$$

Pour $x = 1$, on obtient $R(1) = -R(1)$ et donc $R(1) = 0$.
• Soit $R \in \mathscr{P}$. On suppose que le degré de $R$ est impair. On note $2p+1$, $p \in \mathbb{N}$ ce degré. Pour tout réel $x$ non nul,

$$x^{2p+1} R\left(\frac{1}{x}\right) = R(x).$$

Pour $x = -1$, on obtient $R(-1) = (-1)^{2p+1} R(-1)$ ou encore $R(-1) = -R(-1)$ ou finalement $R(-1) = 0$.

**4)** Soient $P$, $Q$ et $R$ trois éléments de $\mathscr{P} \cup \mathscr{D}$ tels que $P = QR$. Notons $p$, $q$ et $r$ les degrés respectifs de $P$, $Q$ et $R$. On a donc $p = q + r$.

• Supposons que $Q$ et $R$ soient réciproques. On a $Q(X) = \varepsilon_Q X^q Q\left(\frac{1}{X}\right)$ et $R(X) = \varepsilon_R X^r R\left(\frac{1}{X}\right)$ où $\varepsilon_Q$ et $\varepsilon_R$ sont deux éléments de $\{-1, 1\}$.

$$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) R\left(\frac{1}{X}\right) = X^p \varepsilon_Q \frac{1}{X^q} Q(X) \varepsilon_R \frac{1}{X^r} R(X) = \varepsilon_Q \varepsilon_R \frac{X^p}{X^q X^r} Q(X) R(X) = \varepsilon_Q \varepsilon_R P(X).$$

 

Comme $\varepsilon_Q\varepsilon_R \in \{-1,1\}$, le polynôme $P$ est un polynôme réciproque. On note de plus que $\varepsilon_P = \varepsilon_Q\varepsilon_R$ et donc que « l'espèce obéit à la règle des signes » : si $Q$ sont de même espèce, $P$ est de première espèce et si $Q$ et $R$ sont d'espèces différentes, $P$ est de deuxième espèce.

• Supposons que $P$ et $Q$ soient réciproques.

$$X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = X^r \frac{P\left(\frac{1}{X}\right)}{Q\left(\frac{1}{X}\right)} = X^r \frac{\varepsilon_P X^{-p}P(X)}{\varepsilon_Q X^{-q}Q(X)} = \frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_Q} X^{r-p+q}\frac{P(X)}{Q(X)} = \varepsilon_P\varepsilon_Q R(X),$$

et donc, $R$ est réciproque. De même, si $P$ et $R$ sont réciproques, alors $Q$ est réciproque en échangeant les rôles de $Q$ et $R$.Ainsi, dans l'égalité $P = QR$, dès que deux des trois polynômes sont réciproques, le troisième l'est encore.

**5)** Soit $P \in \mathscr{P}$. Le polynôme $X - 1$ est dans $\mathscr{D}$ d'après la question 2) et donc le polynôme $(X-1)P$ est dans $\mathscr{D}$ d'après la question précédente.

Réciproquement, soit $D \in \mathscr{D}$. $D$ est un polynôme non nul admettant $1$ pour racine d'après la question 3). Donc, il existe un unique polynôme $P$ tel que $D = (X-1)P$ : $P$ est le quotient de la division euclidienne de $D$ par $X-1$. De plus, $P = \dfrac{D}{X-1}$ est dans $\mathscr{P}$ d'après la question précédente.

**6)** Soit $P \in \mathscr{P}$ de degré impair. Le polynôme $X + 1$ est dans $\mathscr{P}$ d'après la question 2) et donc le polynôme $(X+1)P$ est dans $\mathscr{P}$ d'après la question précédente.

Réciproquement, soit $Q \in \mathscr{P}$ de degré impair. $Q$ est un polynôme non nul admettant $-1$ pour racine d'après la question 3). Donc, il existe un unique polynôme $P$ tel que $Q = (X+1)P$. Enfin, $P = \dfrac{Q}{X+1}$ est dans $\mathscr{P}$.

En résumé, un polynôme $Q$ de degré impair est dans $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe un unique polynôme $P$ dans $\mathscr{P}$ tel que $Q = (X+1)P$.

**7) Unicité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $P_1$ et $P_2$ deux polynômes tel que $P_1\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = P_2\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^p + \dfrac{1}{X^p}$. En particulier, pour tout réel $x \in [1,+\infty[$, $P_1\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = P_2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Maintenant, quand $x$ décrit $[1,+\infty[$, $x + \dfrac{1}{x}$ décrit au moins $\left[1 + \dfrac{1}{1}, \lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x}\right[ = [2,+\infty[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, pour tout $y \in [2,+\infty[$, $P_1(y) = P_2(y)$ et donc les polynômes $P_1$ et $P_2$ coïncident en une infinité de valeurs. On en déduit que $P_1 = P_2$.

**Existence.** Soient $p \in \mathbb{N}$ puis $T_p$ le $p$-ème polynôme de TCHEBICHEV de première espèce. On sait que $T_p$ est un polynôme de degré $p$ tel que pour tout réel $\theta$, $T_p(\cos\theta) = \cos(p\theta)$. Soit $P(X) = 2T_p\left(\dfrac{X}{2}\right)$. $P$ est un polynôme de degré $p$. Pour tout réel $\theta$,

$$P\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = P(2\cos\theta) = 2T_p(\cos\theta) = 2\cos(p\theta) = e^{ip\theta} + e^{-ip\theta}.$$

Ainsi, les fractions rationnelles $P\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ et $X^p + \dfrac{1}{X^p}$ coïncident en une infinité de valeurs et donc $P\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^p + \dfrac{1}{X^p}$.

**Autre solution.** Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists P_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^p + \dfrac{1}{X^p} = P_p\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ et de plus, $\deg(P_p) = p$.

• $P_0(Y) = 1$ et $P_1(Y) = Y$ conviennent.

• Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_p$ et $P_{p+1}$ deux polynômes tels que $P_p\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^p + \dfrac{1}{X^p}$ et $P_{p+1}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^{p+1} + \dfrac{1}{X^{p+1}}$ et de plus $\deg(P_p) = p$ et $\deg(P_{p+1}) = p+1$.

$$\begin{aligned} X^{p+2} + \frac{1}{X^{p+2}} &= \left(X + \frac{1}{X}\right)\left(X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}}\right) - \left(X^p + \frac{1}{X^p}\right) \\ &= \left(X + \frac{1}{X}\right)P_{p+1}\left(X + \frac{1}{X}\right) - P_p\left(X + \frac{1}{X}\right) = P_{p+2}\left(X + \frac{1}{X}\right), \end{aligned}$$

où $P_{p+2}(Y) = YP_{p+1}(Y) - P_p(Y)$ est un polynôme. De plus, $\deg(P_{p+2}) = \deg(YP_{p+1} - P_p) = \deg(YP_{p+1}) = p+1+1 = p+2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

 

**8)** Puisque R n'admet pas 1 pour racine, R n'est pas dans $\mathscr{D}$ d'après la question 3) et donc R est dans $\mathscr{P}$. Puisque R n'admet pas $-1$ pour racine, R n'est pas de degré impair d'après la question 3) et donc R est de degré pair. Finalement, R est un élément de $\mathscr{P}$ de degré pair. Posons $\deg(R) = 2p$ où $p \in \mathbb{N}$.

Si $p = 0$, le polynôme $P = 1$ convient. On suppose dorénavant $p \geqslant 1$. On pose $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$ où $a_{2p}$ est un réel non nul et les $a_k$ sont des réels tels que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $a_{p+k} = a_{p-k}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^p}R(X) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^{k-p} + a_p + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^{k-p} = \sum_{k=1}^{p} a_{p-k} X^{-k} + a_p + \sum_{k=1}^{p} a_{k+p} X^k \\ &= a_p + \sum_{k=1}^{p} a_{p-k}\left(X^k + \frac{1}{X^k}\right) = a_p + \sum_{k=1}^{p} a_{p-k} P_p\left(X + \frac{1}{X}\right).\end{aligned}$$

Soit $P_0 = a_p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{p-k} P_p$. Alors, pour tout réel non nul $x$, $R(x) = x^p P_0\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Par suite, P est un polynôme tel que pour tout réel non nul $x$, $R(x) = 0 \Leftrightarrow P_0\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Soit $P_1 = 2P_0$. $P_1$ est un polynôme distinct de $P_0$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $R(x) = 0 \Leftrightarrow P_1\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Il n'y a donc pas unicité du polynôme P.
Soit $P_2 = XP_0$. $P_2$ est un polynôme de degré distinct du degré de $P_0$. De plus, pour tout réel $x \neq 0$,

$$P_2\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)P_0\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}P_0\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow P_0\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow R(x) = 0.$$

Il n'y a donc pas unicité du degré de P.

## B. Un problème de dénombrement

**9)** Soit $u \in \mathcal{S}_{i,j}$. Alors $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_j = j - u_{j+1} \leqslant j$. Donc, $u|_{\{0,1,\ldots,i\}} \in \mathcal{S}'_{i,j}$. Ainsi, $\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_{i,j} & \rightarrow & \mathcal{S}'_{i,j} \\ u & \mapsto & u|_{\{0,1,\ldots,i\}}\end{array}$ est bien définie.

Soit $(u, v) \in \mathcal{S}_{i+1,j} \times \mathcal{S}'_{i,j}$.

$$\begin{aligned}u|_{\{0,1,\ldots,i\}} = v &\Leftrightarrow u_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![0, i+1]\!],\ u_k \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 + u_1 + \ldots + u_{i+1} = j \text{ et } \forall k \in [\![0, i]\!],\ u_k = v_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, i]\!],\ u_k = v_k \text{ et } u_{i+1} \in \mathbb{N} \text{ et } u_{i+1} = j - (v_0 + v_1 + \ldots + v_i) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, i]\!],\ u_k = v_k \text{ et } u_{i+1} = j - (v_0 + v_1 + \ldots + v_i) \text{ (car } v_0 + v_1 + \ldots + v_i \leqslant j).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $v$ de $\mathcal{S}'_{i,j}$, il existe un et un seul $u \in \mathcal{S}_{i+1,j}$ tel que $u|_{\{0,1,\ldots,i\}} = v$ et donc l'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_{i,j} & \rightarrow & \mathcal{S}'_{i,j} \\ u & \mapsto & u|_{\{0,1,\ldots,i\}}\end{array}$ est bijective.

**10)** • Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. $s'_{i,j+1}$ est le nombre de $i+1$ uplets $(u_0, u_1, \ldots, u_i)$ d'entiers naturels tels que $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \ldots + u_i \leqslant j + 1$. Ces $i+1$ uplets sont de l'un des deux types disjoints suivants :

1 er type : les $i+1$ uplets tels que $u_0 + u_1 + \ldots + u_i = j + 1$ au nombre de $s_{i,j+1}$,
2 ème type : les $i+1$ uplets tels que $u_0 + u_1 + \ldots + u_j \leqslant j$ au nombre de $s'_{i,j}$.

Ceci montre que $s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j}$.

• Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9), les deux ensembles $\mathcal{S}_{i+1,j+1}$ et $\mathcal{S}'_{i,j+1}$ sont équipotents et donc $s_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1}$ puis

$$s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}.}$$

 

**11)** Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i+j=n$ alors $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$.

• Pour $n=2$, soit $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$ tel que $i+j=2$. Alors $i=j=1$ puis $s'_{1,1}=1$ (il y a un et un seul couple tel que $u_0+u_1 \leqslant 1$ avec $u_0=1$ à savoir $(1,0)$). Comme d'autre part $\binom{1+1-1}{1}=1$, on a bien $s'_{1,1} = \binom{1+1-1}{1}$.

• Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, si $i+j=n$ alors $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]$ tel que $i+j=n+1$. Si $j \geqslant 2$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
s'_{i,j} &= s'_{i-1,j} + s'_{i,j-1} \\
&= \binom{(i-1)+j-1}{i-1} + \binom{i+(j-1)-1}{i} \text{ (par hypothèse de récurrence car } i-1+j = i+j-1 = n) \\
&= \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} + \frac{(i+j-2)!}{i!(j-2)!} = \frac{(i+j-2)!(i+j-1)}{i!(j-1)!} = \frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!} \\
&= \binom{i+j-1}{i}.
\end{aligned}$$

Si $j=1$, il y a exactement un $i+1$ uplet $(u_0,\ldots,u_i)$ tel que $u_0=1$ et $u_0+\ldots+u_j \leqslant 1$ à savoir $(1,0,\ldots,0)$. Donc $s'_{i,1} = 1 = \binom{i+1-1}{i}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^*,\ s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}.}$$

Soit $i \geqslant 2$. Pour $j \geqslant 1$, $s_{i,j} = s'_{i-1,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$. D'autre part, pour $j \geqslant 1$, $s_{1,j}$ est le nombre de couples $(1,u_1)$ tels que $1+u_1=j$. Il y en a $1$ à savoir le couple $(1,j-1)$. Comme $\binom{1+j-2}{1-1} = \binom{j-1}{0} = 1$, on a montré que

$$\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^*,\ s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1}.}$$

## C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

**12)** Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ est inversible.

$$\Phi_{AB} = \det(AB - XI_n) = \det\left(A(BA - XI_n)A^{-1}\right) = \det(A) \times \det(BA - XI_n) \times \frac{1}{\det(A)} = \Phi_{BA}.$$

**13)** On suppose maintenant que $A$ n'est pas inversible. $A$ admet un nombre fini de valeurs propres dans $\mathbb{C}$. Soit $r = \mathrm{Min}\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}$. $r$ est un réel strictement positif.

Soit $k_0 = E\left(\frac{1}{r}\right)+1$. $k_0$ est un entier naturel tel que $k_0 > \frac{1}{r}$ ou encore tel que $\frac{1}{k_0} < r$. Soit $k \geqslant k_0$. Alors, $0 < \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k_0} < r$.
Par définition de $r$, $\frac{1}{k}$ n'est pas valeur propre de $A$ et donc la matrice $A - \frac{1}{k}I_n$ est inversible. D'après la question précédente, $\Phi_{\left(A-\frac{1}{k}I_n\right)B} = \Phi_{B\left(A-\frac{1}{k}I_n\right)}$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant k_0$, $\Phi_{\left(A-\frac{1}{k}I_n\right)B} = \Phi_{B\left(A-\frac{1}{k}I_n\right)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux applications $y \mapsto \det((A-yI_n)B - xI_n)$ et $y \mapsto \det(B(A-yI_n) - xI_n)$ sont deux polynômes en $y$ qui coïncident en une infinité de valeurs de $y$. On en déduit que ces polynômes sont égaux et en particulier qu'ils prennent la même valeur en $0$. On obtient alors $\det(AB - xI_n) = \det(BA - xI_n)$. Cette égalité est vraie pour tout réel $x$ et on a donc montré que $\det(AB - XI_n) = \det(BA - XI_n)$ ou encore $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

$$\boxed{\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}),\ \Phi_{AB} = \Phi_{BA}.}$$

 

# D. Étude spectrale de certaines matrices matrices

**14)** • Soit $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$. D'après la question 11),

$$s_{j,i} = \binom{j+i-2}{j-1} = \binom{j+i-2}{(i+j-2)-(j-1)} = \binom{i+j-2}{i-1} = s_{i,j}.$$

Ainsi, la matrice $S$ est symétrique réelle et en particulier, la matrice $S$ est diagonalisable d'après le théorème spectral.

• $S_0 = (1)$, $S_1 = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} \\ \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

• $\Phi_{S_0} = 1 - X$, $\Phi_{S_1} = X^2 - 3X + 1$ et

$$\Phi_{S_2} = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 3 \\ 1 & 3 & 6-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-8X+3) - (-X+3) + (X+1) = -X^3 + 9X^2 - 9X + 1.$$

• $S_0$ est diagonale.

• $S_1 = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

**15)** Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\psi(P,Q)$ existe.

La bilinéarité, la symétrie et la positivité de $\psi$ sont claires et de plus, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}
\psi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\, dt = 0 \\
&\Rightarrow \forall t \geqslant P(t)e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\
&\Rightarrow \forall t \geqslant 0,\ P(t) = 0 \\
&\Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}
\end{aligned}$$

En résumé, $\psi$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur $\mathbb{R}_n[X]$ ou encore

$$\boxed{\psi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

**16)** $\mathscr{B}_0 = (X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc $\mathscr{B} = \left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On siat que pour tout entier naturel $n$ $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!$. Soit $(i,j) \in [\![0, n]\!]^2$.

$$\psi(B_i, B_j) = \frac{1}{i!j!} \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t}\, dt = \frac{1}{i!j!}\Gamma(i+j+1) = \frac{(i+j)!}{i!}j! = \binom{i+j}{i} = s_{i+1,j+1}.$$

Ainsi, $S = (\psi(B_{i-1}, B_{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$. Donc $S$ est la matrice d'un produit scalaire dans une base ou encore $S$ est une matrice symétrique définie positive.

En particulier, $S$ n'admet pas $0$ pour valeur propre et donc $S$ est une matrice inversible. Ceci montre que $\text{rg}(S) = n + 1$.

Notons $C_1, \ldots, C_{n+1}$ (resp. $C'_1, \ldots, C'_{n+1}$) les colonnes de $S$ (resp. $S'$). D'après la question 10), pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!] \times [\![1, n]\!]$, $s'_{i,j+1} - s'_{i,j} = s_{i,j+1}$ ou encore pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $C'_{j+1} - C'_j = C_{j+1}$. En tenant compte de $C'_1 = (1) = C_1$,

$$\text{rg}(S') = \text{rg}(C'_1, C'_2, \ldots, C'_{n+1}) = \text{rg}(C'_1, C'_2 - C'_1, \ldots, C'_{n+1} - C'_n) = \text{rg}(C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}) = \text{rg}(S) = n + 1.$$

 

**17)** Pour tous $i$ et $j$, il existe un polynôme $P$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_i^{(j)}(t) = P(t)e^{-t}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\forall (i,j,k) \in [\![0,n]\!] \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f_i^{(j)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{-k}\right)$.

Soit $i \in [\![0,n]\!]$. La formule de Leibniz fournit :

$$\begin{aligned}(-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!}e^t &= \frac{(-1)^i}{i!}e^t \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (t^i)^{(k)}(e^{-t})^{(i-k)} = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{i!} \times \frac{i!}{k!(i-k)!}\frac{i!}{(i-k)!}t^{i-k}e^t(-1)^i(-1)^{i-k}e^{-t} \\ &= \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \frac{i!}{k!((i-k)!)^2}t^{i-k} = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\frac{i!}{(i-k)!(k!)^2}t^k = L_i(t)\end{aligned}$$

où $L_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\frac{i!}{(i-k)!(k!)^2}X^k$ est bien un polynôme.

**18)** On rappelle que d'après la question 17), $\forall (i,j,k) \in [\![0,n]\!] \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_i^{(j)}(t)t^k = 0$. $(*)$

D'autre part, pour tout réel $t$, $f_i(t) = t^i \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=i}^{+\infty}\frac{t^k}{(k-i)!}$. Ceci montre que pour tous $i$ et $k$ tels que $0 \leqslant k < i$, $f_i^{(k)}(0) = 0$ et $f_i^{(i)}(0) = i! \times \dfrac{1}{(i-i)!} = i!$. $(**)$

• $\psi(L_0, B_0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)e^tB_0(t)e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1.$

Si $i \geqslant 1$, $\psi(L_i, B_0) = \dfrac{(-1)^i}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t)\, dt = \frac{(-1)^i}{i!}\left[f^{(i-1)}(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{(-1)^i}{i!}\left(\lim_{t\to+\infty} f^{(i-1)}(t) - f_i^{(i-1)}(0)\right) = 0$ d'après $(*)$ et $(**)$.
Finalement, pour $i \geqslant 0$, $\psi(L_i, B_0) = \delta_{i,0}$.

• Soient $i$ et $j$ deux entiers naturels tels que $0 < j \leqslant i$.

$$\psi(L_i, B_j) = \int_0^{+\infty}(-1)^i\frac{f_i^{(i)}(t)}{i!}e^t\frac{t^j}{j!}e^{-t}\, dt = \frac{(-1)^i}{i!j!}\int_0^{+\infty} f_i^{(i)}(t)t^j\, dt.$$

Montrons par récurrence finie que $\forall k \in [\![0,j]\!]$, $\psi(L_i, B_j) = \dfrac{(-1)^{i-k}}{i!(j-k)!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k)}(t)t^{j-k}\, dt$.

- Le résultat est vrai pour $k = 0$.
- Soit $k \in [\![0, j-1]\!]$. Supposons que $\psi(L_i, B_j) = \dfrac{(-1)^{i-k}}{i!(j-k)!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k)}(t)t^{j-k}\, dt$.

Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto f_i^{(i-k)}(t)$ et $t \mapsto t^j$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^A f_i^{(i-k)}(t)t^{j-k}\, dt = \left[f_i^{(i-k-1)}(t)t^{j-k}\right]_0^A - (j-k)\int_0^A f_i^{(i-k-1)}(t)t^{j-k-1}\, dt.$$

Le crochet est nul en $0$ d'après $(*)$ car $0 \leqslant i-k-1 \leqslant i-1 < i$ et le crochet tend vers $0$ quand $A$ tend vers $+\infty$ d'après $(**)$. Quand $A$ tend vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k)}(t)t^{j-k}\, dt = -(j-k)\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k-1)}(t)t^{j-k-1}\, dt$ puis

$$\psi(L_i, B_j) = \frac{(-1)^{i-k}}{i!(j-k)!} \times -(j-k)\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k-1)}(t)t^{j-k-1}\, dt = \frac{(-1)^{i-(k+1)}}{i!(j-(k+1))!}\int_0^{+\infty} f_i^{(i-k-1)}(t)t^{j-k-1}\, dt.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Pour $k = j$, on obtient en particulier $\psi(L_i, B_j) = \dfrac{(-1)^{i-j}}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t)\, dt$.
Si $j < i$, on obtient $\psi(L_i, B_j) = \dfrac{(-1)^{i-j}}{i!}\left[f_i^{(i-j-1)}(t)\right]_0^{+\infty} = 0$ d'après $(*)$ et $(**)$.
Si $j = i$, $\psi(L_i, B_i) = \dfrac{1}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i(t)\, dt = \frac{1}{i!}\int_0^{+\infty} t^ie^{-t}\, dt = 1$ et de nouveau $\psi(L_i, B_i) = \delta_{i,j}$.

 

$$\boxed{\text{Pour tous } i \text{ et } j \text{ tels que } 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n,\ \psi(L_i, B_i) = \delta_{i,j}.}$$

• $\psi(L_0, L_0) = \psi(L_0, B_0) = 1$.

Soit $i \geqslant 1$. D'après la question 17), $L_i = \displaystyle\sum_{l=0}^{i}(-1)^{i-j}\frac{i!}{(i-j)!(j!)^2}X^j = B_i + \sum_{j=0}^{i-1}-1)^{i-j}\frac{i!}{(i-j)!j!}B_j$.

Si $k < i$, $L_i$ est orthogonal à $\text{Vect}(B_0, \ldots, B_k)$ et $L_k$ appartient à $\text{Vect}(B_0, \ldots, B_k)$. Donc $\psi(L_i, L_k) = 0$.

Si $k = i$, $\psi(L_i, L_i) = \psi(L_i, B_i) + \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}-1)^{i-j}\frac{i!}{(i-j)!j!}\psi(L_i, B_j) = 1$.

En résumé, pour tous $i$ et $j$, $\psi(L_i, L_i) = 1$ et si $i \neq j$, $\psi(L_i, L_j) = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthonormée de l'espace euclidien } (\mathbb{R}_n[X], \psi).}$$

**19)** • $T$ est la matrice de la famille de polynômes $(1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$T = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \ldots & \ldots & (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0} & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme $\tau$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de réciproque $\tau^{-1} \ : \ P \to P(X+1)$. Par suite,

$$U = T^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \ldots & \ldots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

De manière générale, Pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]$, le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $T$ est $(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$ (avec la convention usuelle $\binom{j-1}{i-1} = 0$ si $i > j$) et celui de $U$ est $\binom{j-1}{i-1}$.

D'après la question 17), pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\frac{j!}{(j-i)!(i!)^2}X^i = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\frac{j!}{(j-i)!i!}B_i = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}B_i$.

On en déduit que la matrice $T$ est aussi la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{L}$ puis que $U$ est la matrice de passage de $\mathscr{L}$ à $\mathscr{B}$.

$$\boxed{T = \mathscr{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{L}} \text{ et } U = \mathscr{P}_{\mathscr{L}}^{\mathscr{B}}.}$$

D'après la question 16), $S$ est la matrice du produit scalaire $\psi$ dans la base $\mathscr{B}$ et d'après la question 18), la matrice de $\psi$ dans $\mathscr{L}$ est $I_n$. Les formules de changement de bases fournissent alors

$$S = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi) = {}^t\left(\mathscr{P}_{\mathscr{L}}^{\mathscr{B}}\right) \times \text{Mat}_{\mathscr{L}}(\psi) \times \mathscr{P}_{\mathscr{L}}^{\mathscr{B}} = {}^tUI_nU = {}^tUU.$$

 

$$\boxed{S = {}^tUU.}$$

On en déduit que $\det(S) = (\det(U))^2 = \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{k}{k}\right)^2 = 1.$

$$\boxed{\det(S) = 1.}$$

Ensuite, avec les notations de la question 16),

$$\det(S') = \det(C'_1, C'_2, \dots, C'_{n+1}) = \det(C'_1, C'_2 - C'_1, \dots, C'_{n+1} - C'_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_{n+1}) = \det(S) = 1.$$

**20)** Soit $\delta$ l'endormorphisme de matrice $D$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. $\delta$ est défini par : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\delta(X^k) = (-1)^k X^k = (-X)^k$. $\delta$ coïncide avec l'endomorphisme $P \mapsto P(-X)$ sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc $\delta$ est cet endomorphisme.

$(DU)^2$ est la matrice de $(\delta\tau)^2$ dans la base canonique. Or, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\delta\tau(P) = \delta(P(X-1)) = P(1-X)$ puis $(\delta\tau)^2(P) = P(1-(1-X)) = P$. Donc $(\delta\tau)^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ ou encore

$$\boxed{(DU)^2 = I_{n+1}.}$$

$S = {}^tUU$ et donc $S^{-1} = U^{-1\,t}(U^{-1})$. Mais $(DU)^2 = I_{n+1} \Rightarrow U^{-1} = DUD = D^{-1}UD$ (car $D^2 = I_{n+1}$) puis

$$S^{-1} = U^{-1\,t}(U^{-1}) = (D^{-1}UD)^t(D^{-1}UD) = D^{-1}UD^tD^tU^tD^{-1} = D^{-1}(U^tU)D,$$

(car ${}^tD = D = D^{-1}$). Donc $S^{-1}$ est semblable à $U^tU$.

**21)** En particulier, $S^{-1}$ a même polynôme caractéristique de $U^tU$ ou aussi que ${}^tUU = S$ d'après la question 13). Par suite,

$$\begin{aligned}
\Phi_S = \Phi_{S-1} = \det(S^{-1} - XI_{n+1}) &= \det(S^{-1})(-X)^{n+1}\det\left(S - \frac{1}{X}I_{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1}(-1)^{n+1}X^{n+1}\Phi_S\left(\frac{1}{X}\right) \text{ (d'après la question 18))} \\
&= (-1)^{n+1}X^{n+1}\Phi_S\left(\frac{1}{X}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\Psi_S$ est un polynôme réciproque, de première espèce si $n$ est impair et de deuxième espèce si $n$ est pair.

 