SESSION 2012

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE PSI

---

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques

Question 1 Soit $(T_1, T_2) \in (\mathcal{S}_n)^2$. Pout tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

$$((T_1 + T_2)(x), y) = (T_1(x), y) + (T_2(x), y) = (x, T_1(y)) + (x, T_2(y)) = (x, (T_1 + T_2)(y)).$$

Donc $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$.

Question 2 $m(T)$ est une valeur propre de $\mathcal{S}_n$. Donc il existe $u \neq 0$ tel que $T(u) = m(T)u$. Mais alors

$$\mathcal{Q}_S(u) = \frac{(s(u), u)}{\|u\|^2} = m(T)\frac{(u, u)}{\|u\|^2} = m(T).$$

Donc, $m(T)$ est une valeur atteint par $\mathcal{Q}_T$. Il en est de même de $M(T)$.

Question 3 L'endomorphisme T est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de T. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une telle base et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées où la numérotation a été faite de telle sorte que

$$m(T) = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = M(T).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Puisque la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée

$$(T(x), x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Par suite, $(T(x), x) \leqslant M(T) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M(T)\|x\|^2$ et $(T(x), x) \geqslant m(T) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = m(T)\|x\|^2$. Ainsi, pour tout x non nul,

$$m(T) \leqslant \frac{(s(x), x)}{\|x\|^2} = \mathcal{Q}_T(x) \leqslant M(T).$$

De plus, d'après la question précédente, il existe $(u, v) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2$ tel que $\mathcal{Q}_T(u) = m(T)$ et $\mathcal{Q}_T(v) = M(T)$. Ceci montre que

$$\boxed{m(T) = \min_{x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0} \mathcal{Q}_T(x) \text{ et } M(T) = \min_{x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0} \mathcal{Q}_T(x).}$$

Question 4 • Supposons $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}$). On sait que le polynôme caractéristique de T est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T. Il existe $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$. Mais alors $(T(x), x) = \lambda(x,) = \lambda\|x\|^2$ puis

$$\lambda = \frac{(T(x), x)}{\|x\|^2} \geqslant 0 \text{ (resp. } > 0)$$

Ceci montre que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

• Supposons que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de T puis $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associée. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur non nul.

$$(T(x), x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Cette dernière expression est positive dans le cas où $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ et est strictement positive dans le cas où $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$ car les n termes de la somme sont positifs ou nuls et l'un au moins d'entre eux est strictement positif. Donc, $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

On a montré que

$$\boxed{T \in \mathcal{S}_n^+ \Leftrightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ \text{ (resp. } T \in \mathcal{S}_n^{+*} \Leftrightarrow \sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}\text{).}}$$

Question 5 On sait que T est diagonalisable et donc $E = \overset{\perp}{\underset{\lambda \in \sigma(T)}{\bigoplus}} \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée adaptée à cette décomposition puis $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées. On sait qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $T(e_i) = f(\lambda_i)e_i$ ou encore telle que $\forall \lambda \in \sigma(T)$, $\forall y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$, $U(y) = f(\lambda)y$. L'existence et l'unicité de U est démontrée.

La base $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de U et on sait alors que $U \in \mathcal{S}_n$.

Question 6 Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Pour $y \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$,

$$\left(\alpha_0 I + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j T^j\right)(y) = \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda^j\right) y = p(\lambda)y = p(T)(y).$$

Ainsi, les applications linéaires $p(T)$ et $\alpha_0 I + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j T^j$ coïncident sur des sous-espaces supplémentaires et on sait alors que ces endomorphismes sont égaux.

Question 7 Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une application. On sait qu'il existe un polynôme p prenant les mêmes valeurs que g en les $\lambda \in \sigma(T)$ (polynôme d'interpolation de Lagrange). D'après la question précédente, $g(T) = p(T)$. Donc il n'existe pas d'application de J vers $\mathbb{R}$ telle que $g(T)$ ne soit pas un polynôme en T.

Question 8 Avec les notations de la question 5, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $(f(T))(e_i) = f(\lambda_i)e_i$. Par suite, $f(T)$ est diagonalisable dans la même base que T et $\sigma(f(T)) = \{f(\lambda),\ \lambda \in \sigma(T)\}$.

Question 9 Toujours avec les notations de la question 5, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(f(T) \circ g(T))(e_i) = f(T)(g(T)(e_i)) = f(T)(g(\lambda_i)e_i) = g(\lambda_i)f(T)(e_i) = g(\lambda_i)f(\lambda_i)e_i = (fg)(\lambda_i)e_i.$$

Les endomorphismes $(fg)(T)$ et $f(T) \circ g(T)$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$ et donc $(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$.

Question 10 Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s puis $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées. D'après la question 4, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$ et donc $f(\lambda_i)$ existe.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$s^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_i} e_i = f(\lambda_i)e_i = f(s)(e_i).$$

Encore une fois, les endomorphismes s^{-1} et $f(s)$ coïncident sur une base et sont donc égaux.

Question 11 Puisque $s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les λ_i sont positifs ou nuls d'après la question 4 et donc les $f(\lambda_i)$ existent. Il en est de même de $f(s)$. D'après la question 9,

$$\left(\sqrt{s}\right)^2 = \sqrt{s} \circ \sqrt{s} = f(s) \circ f(s) = (f \times f)(s) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(s) = s,$$

(d'après la question 6 appliquée à $p(t) = t$).

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de s puis $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées avec $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{s}(e_i) = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Par suite, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $\sqrt{s}$ et donc $\sqrt{s} \in \mathcal{S}_n$. De plus, les valeurs propres de $\sqrt{s}$ sont les $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et donc $\sqrt{s} \in \mathcal{S}_n^+$. En résumé, $\sqrt{s}$ est un élément de $\mathcal{S}_n^+$ tel que $\left(\sqrt{s}\right)^2 = s$.

Soit c un élément de $\mathcal{S}_n$ tel que $c^2 = s$. Alors, $c \circ s = c^3 = s \circ c$. Puisque c et s commutent, on sait que les sous-espaces propres de s sont stables par c. Puisque les valeurs propres de s sont simples, les sous-espaces propres de s sont les droites $\mathrm{Vect}(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, la droite $\mathrm{Vect}(e_i)$ est stable par c et donc e_i est un vecteur propre de c. Par suite, il existe des réels μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $c(e_i) = \mu_i e_i$. L'endomorphisme c ainsi défini est symétrique d'après le théorème spectral puis

$$c^2 = s \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ c^2(e_i) = s(e_i) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mu_i^2 e_i = \lambda_i e_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mu_i^2 = \lambda_i. \quad (*)$$

• Si $\lambda_1 > 0$, $(*)$ admet 2^n n-uplets solutions deux à deux distincts à savoir les $\left(\pm\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right)$ et donc il existe exactement 2^n éléments c de $\mathcal{S}_n$ tels que $c^2 = s$.
Si $\lambda_1 = 0$, $(*)$ admet 2^{n-1} n-uplets solutions deux à deux distincts à savoir les $\left(0, \pm\sqrt{\lambda_2}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n}\right)$ et donc il existe exactement 2^{n-1} éléments c de $\mathcal{S}_n$ tels que $c^2 = s$.

• Il existe un et un seul n-uplet de réels positifs solution de $(*)$ à savoir $\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ et donc l'équation $c^2 = s$ admet exactement une solution dans $\mathcal{S}_n^+$ à savoir $c = \sqrt{s}$.

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Question 12 On sait que $(\mathcal{S}_n, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donc, si $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$, $T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n$.

• **Réflexivité de $\geqslant$.** Soit $T \in \mathcal{S}_n$. $T - T = 0 \in \mathcal{S}_n^+$. Donc $T \geqslant T$.

• **Anti-symétrie de $\geqslant$.** Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$. Supposons que $T_1 \geqslant T_2$ et $T_2 \geqslant T_1$. Alors $T_1 - T_2 \in \mathcal{S}_n^+$ et $T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+$. D'après la question 4, les n valeurs propres de $T_1 - T_2$ et les n valeurs propres de $T_2 - T_1$ sont des réels positifs. Puisque les valeurs propres de $T_2 - T_1$ sont les opposées des valeurs propres de $T_1 - T_2$, on en déduit que les valeurs propres de $T_1 - T_2$ sont nulles. Puisque $T_1 - T_2$ est diagonalisable en tant qu'endomorphisme symétrique, l'endomorphisme $T_1 - T_2$ s'annule sur une base de $\mathbb{R}^n$ et donc $T_1 - T_2 = 0$ ou encore $T_1 = T_2$.

• **Transitivité de $\geqslant$.** Soit $(T_1, T_2, T_3) \in \mathcal{S}_n^3$. Supposons que $T_1 \geqslant T_2$ et $T_2 \geqslant T_3$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$((T_3 - T_1)(x), x) = ((T_3 - T_2)(x), x) + ((T_2 - T_1)(x), x) \geqslant 0,$$

et donc $T_3 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+$ puis $T_1 \leqslant T_3$.

On a montré que $\geqslant$ est réflexive, anti-symétrique et transitive et donc que $\geqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
Supposons que $n \geqslant 2$. On définit un élément T de $\mathcal{S}_n$ par $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = -e_2$, $\forall i \notin \{1,2\}$, $T(e_i) = e_i$. La famille des valeurs de T est $(1, -1, 1, \ldots, 1)$ et la famille des valeurs propres de $-T$ est $(-1, 1, -1, \ldots, -1)$. Aucune de ces deux familles n'est constituée de réels positifs et donc on n'a ni $T \geqslant 0$, ni $0 \geqslant T$. Si $n \geqslant 2$, $\geqslant$ n'est pas une relation d'ordre totale. Si $n = 1$, il est clair que $\geqslant$ est une relation d'ordre totale.

Question 13 Soit $U \in \mathcal{S}_n$. Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$ tel que $T_2 \geqslant T_1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}(U \circ (T_2 - T_1) \circ U(x), x) &= ((T_2 - T_1) \circ U(x), U(x)) \ (\text{car } U \in \mathcal{S}_n) \\ &\geqslant 0 \ (\text{car } T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+).\end{aligned}$$

Donc $U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U = U \circ (T_2 - T_1) \circ U$ est dans $\mathcal{S}_n^+$ puis $U \circ T_2 \circ U \geqslant U \circ T_1 \circ U$.

Question 14 On peut, comme le veut l'énoncé, considérer les endomorphismes T_1 et T_2 de $\mathbb{R}^2$ de matrices respectives, dans la base canonique orthonormée (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M_1 et M_2 sont symétriques et donc T_1 et T_2 sont symétriques puisque la base (e_1, e_2) est orthonormée. Les valeurs propres de T_1 sont 0 et 2 et donc $T_1 \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de T_2 sont $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$ et donc $T_2 \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$.
$M_2 - M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$((T_2 - T_1)(ae_1 + be_2), ae_1 + be_2) = (ae_1, ae_1 + be_2) = a^2 \geqslant 0.$$

On en déduit que $T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_2^+$ puis que $T_2 \geqslant T_1$.

D'après la question 9, $f(T_1) = T_1^2$ et $f(T_2) = T_2^2$. Or,

$$M_2^2 - M_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$((T_2^2 - T_1^2)(ae_1 + be_2), ae_1 + be_2) = (a(3e_1 + e_2) + be_1, ae_1 + be_2) = (3a + b)a + ab = 3a^2 + 2ab.$$

En particulier, $((T_2^2 - T_1^2)(e_1 - 2e_2), e_1 - 2e_2) = -1 < 0$ et donc $f(T_2) - f(T_1) \notin \mathcal{S}_2^+$. On a trouvé un couple (T_1, T_2) d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $T_2 \geqslant T_1$ et $f(T_2) \ngeqslant f(T_1)$ et donc f ne définit pas un opérateur croissant.

Question 15 $U = T_2^{-1/2}$ est symétrique car diagonalisable en base orthonormée.
T_1 et U sont inversibles et donc $U \circ T_1 \circ U$ est inversible ou encore $U \circ T_1 \circ U$ n'admet pas 0 pour valeur propre. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$(U \circ T_1 \circ U(x), x) = (T_1(U(x)), U(x)) \geqslant 0.$$

On en déduit que $U \circ T_1 \circ U$ est un endomorphisme symétrique positif n'admettant pas 0 pour valeur propre et finalement $U \circ T_1 \circ U \in \mathcal{S}_n^{++}$.

D'après la question 13, $U \circ T_2 \circ U \geqslant U \circ T_1 \circ U$ ou encore $\mathrm{Id} \geqslant U \circ T_1 \circ U$ puis $\mathrm{Id} - U \circ T_1 \circ U \in \mathcal{S}_n^+$.
On en déduit que les valeurs propres de $\mathrm{Id} - U \circ T_1 \circ U$, à savoir les $1 - \lambda$ où $\lambda \in \sigma(U \circ T_1 \circ U)$, sont positives et donc

$$\forall \lambda \in \sigma(U \circ T_1 \circ U),\ 0 < \lambda \leqslant 1.$$

Les valeurs propres de $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} = (U \circ T_1 \circ U)^{-1}$ sont les $\dfrac{1}{\lambda}$ et sont donc supérieures ou égales à 1 puis les valeurs propres de $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} - \mathrm{Id}$ sont positives et donc

$$U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geqslant \mathrm{Id}.$$

En composant par U à gauche et à droite, on obtient d'après la question 13, $U \circ U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \circ U \geqslant U \circ \mathrm{Id} \circ U$ ou encore $T_1^{-1} \geqslant T_2^{-1}$. Par suite, $T_1^{-1} - T_2^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$ ou encore $(-T_2^{-1}) - (-T_1^{-1}) \in \mathcal{S}_n^+$ ou encore $-T_2^{-1} \geqslant -T_1^{-1}$.

Vérifions enfin que $f(T_1) = -T_1^{-1}$ et $f(T_2) = T_2^{-1}$. Soient $g = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}}$ et h la fonction constante $t \mapsto 1$. D'après la question 9,

$$(-T_1) \circ f(T_1) = g(T_1) \circ f(T_1) = (fg)(T_1) = h(T_1) = \mathrm{Id},$$

et donc $f(T_1) = -T_1^{-1}$. On a montré que $\forall (T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^{++}$, $T_2 \geqslant T_1 \Rightarrow f(T_2) \geqslant f(T_1)$ et donc f définit un opérateur croissant.

Question 16 Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^+$ tel que $T_2 \geqslant T_1$. D'après la question 11, $f(T_1) = \sqrt{T_1}$ et $f(T_2) = \sqrt{T_2}$. D'autre part, $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \in \mathcal{S}_n$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors, $\sqrt{T_2}(x) - \sqrt{T_1}(x) = \lambda x$ puis en calculant les images des deux membres par $\sqrt{T_1}$ ou $\sqrt{T_2}$, on obtient

- $\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_2}(x) - T_1(x) = \sqrt{T_1} \circ (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x) = \lambda \sqrt{T_1}(x)$
- $T_2(x) - \sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_1}(x) = \sqrt{T_2} \circ (\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})(x) = \lambda \sqrt{T_2}(x)$.

En additionnant et en effectuant le produit scalaire avec x, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)(x), x\right) &= \left(\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_2}(x) - T_1(x), x\right) + \left(T_2(x) - \sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_1}(x), x\right) \\
&= ((T_2 - T_1)(x), x) + ((\sqrt{T_1} \circ \sqrt{T_2} - \sqrt{T_2} \circ \sqrt{T_1})(x), x) \\
&= ((T_2 - T_1)(x), x) + \left(\sqrt{T_2}(x), \sqrt{T_1}(x), x\right) - \left(\sqrt{T_1}(x), \sqrt{T_2}(x)\right) \\
&= ((T_2 - T_1)(x), x) \geqslant 0 \quad (*).
\end{aligned}$$

Or $\left(\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)(x), x\right) = \left(\sqrt{T_1}(x), x\right) + \left(\sqrt{T_2}(x), x\right) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\left(\sqrt{T_1}(x), x\right) = \left(\sqrt{T_2}(x), x\right) = 0$.

1er cas. Si $\left(\sqrt{T_1}(x), x\right) = \left(\sqrt{T_2}(x), x\right) = 0$, alors, puis que $x \neq 0$,

$$\lambda = \frac{\lambda(x, x)}{x, x} = \frac{\left(\sqrt{T_2}(x) - \sqrt{T_1}(x), x\right)}{(x, x)} = 0.$$

2ème cas. Si $\left(\sqrt{T_1}(x), x\right) \neq 0$ ou $\left(\sqrt{T_2}(x), x\right) \neq 0$, alors $\left(\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)(x), x\right) > 0$ et l'inégalité $(*)$ fournit $\lambda \geqslant 0$.

On a montré que les valeurs propres de $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1}$ sont des réels positifs. Mais alors $\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1} \in \mathcal{S}_n^+$ puis $\sqrt{T_2} \geqslant \sqrt{T_1}$.

Ceci montre que f définit un opérateur croissant.

3 Inégalité de Löwner-Heinz

Question 17 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ puis $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications définissant des opérateurs croissants. Alors $g \circ f$ définit un opérateur croissant car pour tout $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$,

$$T_2 \geqslant T_1 \Rightarrow f(T_2) \geqslant f(T_1) \Rightarrow g \circ f(T_2) \geqslant g \circ f(T_1).$$

Soit $u \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t > 0$, $f_u(t) = \dfrac{t+u-u}{t+u} = 1 + u\left(-\dfrac{1}{t+u}\right) = k \circ h \circ g(t)$ où $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ t & \mapsto & t+u \end{array}$, $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\dfrac{1}{t} \end{array}$ et $k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1+ut \end{array}$.

• Pour tout $T \in \mathcal{S}_n$, $g(T) = T + u\mathrm{Id}$ d'après la question 6.
Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$ tel que $T_2 \geqslant T_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $((T_2 + u\mathrm{Id})(x) - (T_1 + u\mathrm{Id})(x), x) = (T_2(x) - T_1(x), x) \geqslant 0$ et donc $T_2 + u\mathrm{Id} \geqslant T_1 + u\mathrm{Id}$. Ceci montre que g définit un opérateur croissant.

• Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{S}_n^2$ tel que $T_2 \geqslant T_1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(k(T_2)(x) - k(T_1)(x), x) = ((\mathrm{Id} + uT_2)(x) - (\mathrm{Id} + uT_1)(x), x) = u(T_2(x) - T_1(x), x) \geqslant 0$ et donc $k(T_2) \geqslant k(T_1)$. Ceci montre que k définit un opérateur croissant.

• h définit un opérateur croissant d'après la question 15.

Mais alors, $f_u = k \circ h \circ g$ définit un opérateur croissant.

Question 18 Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ puis $\Phi'(s)$ la matrice de $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi'(s) = P^{-1}\Phi(s)P$. On pose $P = (p_{k,l})$ et $P^{-1} = (q_{k,l})$. Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $s > 0$

$$\Phi'(s)_{i,j} = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} q_{i,k}\Phi(s)_{k,l}p_{l,j}.$$

Par hypothèse, chacune des fonctions $s : \Phi(s)_{k,l}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de la fonction $s \mapsto \Phi'(s)_{i,j}$ et

$$\int_0^{+\infty} \Phi'(s)_{i,j}\, ds = \sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} q_{i,k}\left(\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{k,l}\, ds\right)p_{l,j},$$

ou encore $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi'(s)\, ds = P^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi(s)\, ds\right)P$. La définition de l'énoncé est donc indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$ mais pas la valeur de l'intégrale.

Question 19 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de s puis $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées. Alors, pour tout $u > 0$,

$$\Phi(u) = \mathrm{diag}\left(f_u(\lambda_i)u^{a-1}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_i u^{a-1}}{u + \lambda_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Puisque $\lambda_i > 0$ (car $s \in \mathcal{S}_n^{++}$), la fonction $u \mapsto \dfrac{\lambda_i u^{a-1}}{u + \lambda_i}$ est continue sur $]0, +\infty[$, positive, équivalente en 0 à u^{a-1} et équivalente en $+\infty[$ à $\lambda_i u^{a-2}$. Puisque $a - 1 > -1$, la fonction $u \mapsto \lambda_i u^{a-2}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite et puisque $a - 2 < -1$, la fonction $u \mapsto \lambda_i u^{a-2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Il en est de même de la fonction $u \mapsto \dfrac{\lambda_i u^{a-1}}{u + \lambda_i}$.

Ainsi, chaque fonction $u \mapsto \dfrac{\lambda_i u^{a-1}}{u + \lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction Φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 20 Avec les notations de la question précédente, la matrice de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\, du$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{diag}\left(\int_0^{+\infty} f_u(\lambda_i)u^{a-1}\, du\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\mathrm{diag}\left(\lambda_i^a\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

Par suite, les endomorphismes $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\, du$ et $\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}s^a$ coïncident sur une base et sont donc égaux. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(u)\, du = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}s^a$ ou encore

$$\boxed{\forall s \in \mathcal{S}_n^{++}, \ \forall a \in]0,1[, \ s^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} f_u(s)u^{a-1}\ du.}$$

Question 21 Soit $(s_1, s_2) \in \left(\mathcal{S}_n^{++}\right)^2$ tel que $s_2 \geqslant s_1$. Pour chaque $u > 0$, notons s_u l'endomorphisme symétrique $f_u(s_2) - f_u(s_1)$ puis S_u la matrice de s_u dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^n$. D'après la question 17, pour chaque $u > 0$, s_u est un endomorphisme symétrique positif.

Soit $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
((s_2^a - s_1^a)(x), x) &= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\left(\int_0^{+\infty} (f_u(s_2) - f_u(s_1))\, u^{a-1}\ du\right)(x), x\right) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\left(\left(\int_0^{+\infty} s_u u^{a-1}\ du\right)(x), x\right) \\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\int_0^{+\infty} S_u u^{a-1}\ du\right)_{i,j} x_i x_j = \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(S_u)_{i,j}x_i x_j\right) u^{a-1}\ du \\
&= \frac{\sin(a\pi)}{\pi}\int_0^{+\infty} (s_u(x), x))\, u^{a-1}\ du
\end{aligned}$$

Puisque pour chaque $u > 0$, s_u est positif, pour chaque $u > 0$, on a $(s_u(x), x))\, u^{a-1} \geqslant 0$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} (s_u(x), x))\, u^{a-1}\ du \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et finalement $((s_2^a - s_1^a)(x), x) \geqslant 0$.

En résumé, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $((s_2^a - s_1^a)(x), x) \geqslant 0$. Par suite, $s_2^a - s_1^a \in \mathcal{S}_n^+$ puis $s_2^a \geqslant s_1^a$ ou encore $\varphi_a(s_2) \geqslant \varphi_a(s_1)$. On a montré que pour tout $a \in]0,1[$, φ_a est un opérateur croissant.

