SESSION 2014

Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1)

$$\begin{aligned}
ze^z = w &\Leftrightarrow Re^{i\theta}e^{R\cos\theta + iR\sin\theta} = re^{i\alpha} \Leftrightarrow Re^{R\cos\theta} \times e^{i(\theta+R\sin\theta)} = r \times e^{i\alpha} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re^{R\cos\theta} = r \\ \theta + R\sin\theta = \alpha \text{ (modulo } 2\pi) \end{array}\right. \quad (\text{car } Re^{R\cos\theta} \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re^{R\cos\theta} = r \\ R\sin\theta = \alpha - \theta \text{ (modulo } 2\pi) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

2) • Puisque $\alpha > 0$, quand θ tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta \sim \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} \sim \dfrac{\alpha}{\theta}$ puis $\lim\limits_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta = +\infty$ puis $\lim\limits_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \exp\left(\dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta\right) = +\infty$. Comme de plus, $\lim\limits_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta} = +\infty$, en multipliant on obtient, $\lim\limits_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \varphi(\theta) = +\infty$.

• Puisque $\alpha > \pi$, quand θ tend vers π par valeurs inférieures, $\dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\cos\theta \sim \dfrac{\pi-\alpha}{\pi-\theta}$ et donc $\lim\limits_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin(\pi-\theta)} = -\infty$. Mais alors,

$$\lim_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \varphi(\theta) = \lim_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \frac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\exp\left(\frac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta\right) = -\lim_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \frac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta\exp\left(\frac{\alpha-\theta}{\sin\theta}\cos\theta\right) = -\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0,$$

d'après un théorème de croissances comparées.

$$\boxed{\lim_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \varphi(\theta) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \varphi(\theta) = 0.}$$

Puisque la fonction φ est continue sur $]0,\pi[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que pour tout réel $r \in \left]\lim\limits_{\substack{\theta\to\pi \\ \theta<\pi}} \varphi(\theta), \lim\limits_{\substack{\theta\to 0 \\ \theta>0}} \varphi(\theta)\right[=]0,+\infty[$, l'équation $\varphi(\theta) = r$ a au moins une solution dans $]0,\pi[$.

3) Soit $w \in \mathbb{C}$.

• Si $w = 0$, alors $z = 0$ est un élément de D tel que $g(z) = w$.

• Posons $w = re^{i\alpha}$ où $r > 0$ et $\alpha \in [2\pi, 4\pi[$. D'après la question précédente, il existe $\theta \in]0,\pi[$ tel que $g(\theta) = r$. Posons $R = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}$. Alors R est un réel strictement positif tel que $R\sin\theta = \alpha - \theta$ (modulo 2π) et de plus, $Re^{R\cos\theta} = \varphi(\theta) = r$. D'après la première question, $ze^z = w$. Encore une fois z est un élément de D tel que $g(z) = w$.

On a montré que tout élément w de $\mathbb{C}$ a au moins un antécédent par g dans D et donc

$$\boxed{g \text{ est surjective.}}$$

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

4) N est nilpotente d'indice n et donc N^{n-1} n'est pas la matrice nulle. Il existe donc $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N^{n-1}X \neq 0$.

Montrons que la famille $(N^kX)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre. Supposons par l'absurde cette famille liée. Alors, il existe $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ famille de complexes non tous nuls telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} N^kX = 0$.

Soit $p = \text{Min}\{k \in [\![0, n-1]\!]/ \lambda_k = 0\}$. Alors $n - p - 1 \geqslant 0$ puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} N^kX = 0 \Rightarrow \sum_{k=p}^{n-1} N^kX = 0 \Rightarrow N^{n-p-1}\sum_{k=p}^{n-1} N^kX = 0 \Rightarrow N^{n-1}X = 0 \text{ (car pour } k \geqslant n,\ N^k = 0).$$

Ceci est absurde et donc la famille $(N^kX)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre.

5) La famille $(N^kX)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre et de cardinal n. Donc cette famille est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ (de sorte que $N = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$).
Soit $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associée à la base $(N^{n-1}X, N^{n-2}X, \ldots, NX, X) = (N^{n-1-k}X)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $N \times N^{n-1-k}X = N^{n-1)-(k-1)}X$ et donc $f(e_k) = e_{k-1}$. D'autre part, $f(e_1) = 0$. Par suite, $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = J_n(0)$.

N et $J_n(0)$ sont les matrices de f dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. Les formules de changement de bases montrent que les matrices N et $J_n(0)$ sont semblables.

6) Puisque les matrices $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent, $e^{J_n(0)} \times e^{-J_n(0)} = e^{J_n(0)-J_n(0)} = e^0 = I = e^{-J_n(0)} \times e^{J_n(0)}$. Donc la matrice $e^{J_n(0)}$ est inversible et $\left(e^{J_n(0)}\right)^{-1} = e^{-J_n(0)}$.

On sait que les matrices $J_n(0)$ et $e^{J_n(0)}$ commutent. Donc, $\left(J_n(0)e^{J_n(0)}\right)^n = (J_n(0))^n \left(e^{J_n(0)}\right)^n = 0$ car $J_n(0)^n$ est semblable à $N^n = 0$ et donc $J_n(0)^n = 0$. Ainsi, la matrice $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice au plus n.

$J_n(0)^{n-1}$ est semblable à N^{n-1} et donc $J_n(0)^{n-1} \neq 0$. D'autre part, $\left(e^{J_n(0)}\right)^{n-1}$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles et, puisque les matrices $J_n(0)$ et $e^{J_n(0)}$ commutent, $\left(J_n(0)e^{J_n(0)}\right)^{n-1} = J_n(0)^{n-1}\left(e^{J_n(0)}\right)^{n-1} \neq 0$. On a montré que la matrice $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) L'application $\psi\ :\ M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, on en déduit que ψ est continu sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Mais alors

$$\begin{aligned}
Pe^{J_n(0)}P^{-1} &= P\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}J_n(0)^k\right)P^{-1} = \psi\left(\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}J_n(0)^k\right)\right)\\
&= \lim_{p\to+\infty}\psi\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}J_n(0)^k\right) \text{ (par continuité de } \psi \text{ sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et donc en } J_n(0))\\
&= \lim_{p\to+\infty}P\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}J_n(0)^k\right)P^{-1} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\left(PJ_n(0)P^{-1}\right)^k\\
&= e^{PJ_n(0)P^{-1}}.
\end{aligned}$$

$J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n et donc semblable à $J_n(0)$ d'après la question 5. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0)e^{J_n(0)} = P^{-1}J_n(0)P$. On en déduit que

$$J_n(0) = PJ_n(0)e^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)P^{-1}Pe^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)P^{-1}e^{PJ_n(0)P^{-1}}.$$

Posons $\widetilde{N} = PJ_n(0)P^{-1}$. $\widetilde{N}$ est semblable à $J_n(0)$ et donc nilpotente d'indice n. De plus, $\widetilde{N}e^{\widetilde{N}} = J_n(0)$.

8) Soit λ un complexe non nul. D'après la question 3, il existe $\mu \in D$ tel que $g(\mu) = \lambda$. Puisque $\lambda \neq 0$, μ est différent de 0 et un argument de μ est dans $]0, \pi[$. Mais alors $\mu \neq -1$.

Puisque les matrices μI_n et $J_n(0)$ commutent

$$
\begin{aligned}
J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} &= (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu I_n + J_n(0)} = (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu I_n} e^{J_n(0)} = (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu} I_n e^{J_n(0)} \\
&= (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) = (\mu I_n + J_n(0))\, e^{\mu} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) \\
&= \mu e^{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k + e^{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^{k+1} = \mu e^{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k + e^{\mu} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} J_n(0)^k \\
&= \mu e^{\mu} I_n + \mu e^{\mu} J_n(0) + e^{\mu} J_n(0) + \sum_{k=2}^{n-1} e^{\mu} \left(\frac{\mu}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) J_n(0)^k \\
&= \lambda I_n + (\mu+1) e^{\mu} J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0)),
\end{aligned}
$$

où $p = e^{\mu} \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{\mu}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) X^{k-2}$.

9) $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0))$ s'écrit $J_n(0)A$ où A et $J_n(0)$ commutent. Donc,

$$
\left((\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0)) \right)^n = J_n(0)^n A^n = 0.
$$

Donc, $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0)+J_n(0)^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n. Ensuite, puisque les matrices $(\mu+1)e^{\mu}I_n$ et $J_n(0)p(J_n(0))$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
\left((\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0)) \right)^{n-1} &= (J_n(0))^{n-1} \left((\mu+1)e^{\mu}I_n + J_n(0)p(J_n(0)) \right)^{n-1} \\
&= (J_n(0))^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left((\mu+1)e^{\mu} \right)^{n-1-k} \left(J_n(0)p(J_n(0)) \right)^k \\
&= (J_n(0))^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left((\mu+1)e^{\mu} \right)^{n-1-k} (J_n(0))^k \left(p(J_n(0)) \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left((\mu+1)e^{\mu} \right)^{n-1-k} (J_n(0))^{n-1+k} \left(p(J_n(0)) \right)^k \\
&= \left((\mu+1)e^{\mu} \right)^{n-1} (J_n(0))^{n-1} \neq 0 \text{ (car } \mu \neq -1).
\end{aligned}
$$

Donc, $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + J_n(0)^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n. Cette matrice est semblable à $J_n(0)$ d'après la question 5 et donc, il existe une matrice inversible P telle que $J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + P{-}1J_n(0)P = P^{-1}(\lambda I_n + J_n(0))\, P = P^{-1} J_n(\lambda)$. Mais alors, comme à la question 7,

$$
J_n(\lambda) = P J_n(\mu) e^{J_n(\mu)} P^{-1} = P J_n(\mu) P^{-1} e^{P J_n(\mu) P^{-1}}.
$$

La matrice $M = PJ_n(\mu)P^{-1}$ est une matrice carrée telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10) On reprend les notations de la question 5. Il existe un vecteur colonne X tel que $N^{p-1}X \neq 0$. Comme à la question 4, la famille $\left(N^{p-1-k}X \right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. La famille $(e'_1, \dots, e'_p)$ canoniquement associée dans $\mathbb{C}^n$ peut être complétée en une base de $\mathbb{C}^n$. La matrice de l'endomorphisme f dans $\mathscr{B}'$ a la forme désirée.

11) Un calcul par blocs fournit

$$
T_X \times T_{-X} = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n.
$$

Donc T_X est inversible et $(T_X)^{-1} = T_{-X}$.

$$
\begin{aligned}
A' &= T_X \times A \times T_{-X} \\
&= \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_p(0) & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_p(0) & B+XC \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & -X \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} J_p(0) & B+XC-J_p(0)X \\ 0 & C \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

12) Soit $X \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$. Notons $X_1, \ldots, X_p$ les lignes de X. La matrice $J_p(0)X$ est la matrice de format $(p, n-p)$ dont les lignes sont $X_2, \ldots, X_p, 0$.
Par suite, en notant $B_1, \ldots, B_p$ (respectivement $C_1, \ldots, C_p$, $Y_1, \ldots, Y_p$) les lignes de B (respectivement les colonnes de C, les lignes de Y), l'égalité $Y = B + XC - J_p(0)X$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1 = B_1 + X_1C_1 - X_2 \\ Y_2 = B_2 + X_2C_2 - X_3 \\ \vdots \\ Y_{p-1} = B_{p-1} + X_{p-1}C_{p-1} - X_p \\ Y_p = B_p + X_pC_p \end{array}\right.$$

On choisit alors X de sorte que, pour $2 \leqslant k \leqslant p$, on prend $X_k = Y_{k-1} - B_{k-1} - X_{k-1}C_{k-1}$. Alors, les $p-1$ premières lignes de la matrice $B + XC - J_p(0)X$ sont nulles.

13) A' est semblable à A qui est semblable à N. Donc A' est semblable à N et en particulier, A' est nilpotente d'indice p.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A'. Montrons par récurrence que si $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, alors $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $f^i(x) \in \text{Vect}(e_{p+1-i}, \ldots, e_n)$.

• C'est vrai pour $i = 0$.
• Soit $i \in [\![0, p-2]\!]$. Supposons que pour tout x de $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, $f^i(x) \in \text{Vect}(e_{p+1-i}, \ldots, e_n)$. Alors pour $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, $f^{i+1}(x) \in\in \text{Vect}\left((f(e_{p+1-i}), \ldots, f(e_n)\right)$. Puisque seule la dernière ligne de Y est éventuellement non nulle,

$$\begin{aligned}\text{Vect}\left((f(e_{p+1-i}), \ldots, f(e_n)\right) &= \text{Vect}\left((f(e_{p+1-i}), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)\right) \\ &\subset \text{Vect}\left((f(e_{p+1-i}), \ldots, f(e_p), e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right) \\ &= \text{Vect}\left(e_{p+1-(i+1)}, \ldots, e_{p-1}, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right).\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Notons alors $y_{p+1}, \ldots, y_n$ les coefficients de la dernière ligne de la matrice Y. Pour chaque $j \in [\![p+1, n]\!]$, on peut poser $f(e_j) = y_je_p + x_j$ où $x_j \in \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

$$0 = f^p(e_j) = y_jf^{p-1}(e_p) + f^{p-1}(x_j) = y_je_1 + f^{p-1}(x_j),$$

avec $f^{p-1}(x_j) \in \text{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$. Puisque la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on en déduit que $y_j = 0$. On a montré que la matrice Y est nulle et donc qu'une matrice N, nilpotente d'indice p est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} J_p(0) & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ où $Z \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{C})$.

14) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, N est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{p_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$.

• C'est immédiat si $n = 1$ car dans ce cas $N = 0 = J_1(0)$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons le résultat acquis pour tout format inférieur ou égal à n. Soit $N \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Si $p = 1$, $N = 0$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_1(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_1(0) \end{pmatrix}$. Si $p = n+1$, la question 5 montre que N est semblable à $J_{n+1}(0)$. Supposons maintenant que $1 < p < n+1$. Les questions précédentes montrent que N est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} J_p(0) & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ où $Z \in \mathscr{M}_{n+1-p}(\mathbb{C})$ avec $1 \leqslant n+1-p \leqslant n$. Un calcul par blocs montre que Z est nilpotente et l'hypothèse de récurrence montre que Z est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} J_{p_2}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{p_3}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$. Mais alors N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} J_p(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{p_2}(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$.

Le résultat est démontré par récurrence.

D. Représentation Ae^A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

15) Le polynôme caractéristique $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de f d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Puisque les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, sont deux à deux premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer que $E = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant s} F_i$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant s$, notons f_i la restriction de f à F_i et β_i la dimension de F_i. Puisque f et $(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$ commutent, f laisse stable F_i ou encore f_i « est » un endomorphisme de F_i.
Par définition de F_i, $(f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i})^{\alpha_i} = 0$. Soit N_i la matrice de $f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$ dans une base $\mathscr{B}_i$ de F_i. N_i est nilpotente d'indice inférieur ou égal à α_i et donc la matrice de f_i dans $\mathscr{B}_i$ s'écrit $\lambda_i I_{\beta_i} + N_i$. Soit $\mathscr{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s$. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\beta_1} + N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\beta_2} + N_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_s I_{\beta_s} + N_s \end{pmatrix}$. Il reste à vérifier que les β_i sont les α_i.

f_i admet au moins une valeur propre car F_i est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle. D'autre part, le polynôme $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i. Ceci montre que λ_i est l'unique valeur propre de f_i puis que le polynôme caractéristique de f_i est $(\lambda_i - X)^{\beta_i}$. On sait alors que $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} \chi_{f_i} = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Par unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles, pour chaque $i \in [\![1, s]\!]$, $\beta_i = \alpha_i$ ce qui achève la démonstration.

16) La matrice A est donc semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont de la forme $\lambda I + N$ où N est une matrice nilpotente. Ces blocs sont eux-mêmes semblables à une matrice du type $J_i(\lambda)$ d'après la question 14. Donc A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sont des blocs de Jordan. Soit T la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont ces blocs de Jordan et soit P une matrice inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
Pour chacun des blocs de Jordan, il existe M_i' telle que $M_i' e^{M_i'} = J_i(\lambda)$ d'après la question 9. Soit M' la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les M_i' puis $M = PM'P^{-1}$. Alors $Me^M = A$.

On a montré que l'application $M \mapsto Me^M$ est surjective.

