SESSION 2016

Concours commun Mines-Ponts

DEUXIÈME ÉPREUVE. FILIÈRE MP

A. Une intégrale à paramètre

1) La fonction $\psi\ :\ u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• En 0, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}} > 0$ avec $-\dfrac{1}{2} > -1$. Donc, la fonction ψ est intégrable sur un voisinage de 0.

• En $+\infty$, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ avec $2 > 1$ (car $u^2\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} = u^{\frac{3}{2}}e^{-u} \underset{u\to 0}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées). Donc, la fonction ψ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, la fonction ψ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $x > 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, est équivalente en 0 à $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et donc est intégrable sur un voisinage de 0, est négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{u^2}$ et donc est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Finalement, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Dans ce cas, $F(x)$ existe.

• Si $x = 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} = e^{-u}u^{-\frac{3}{2}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, équivalente en 0 à $u^{-\frac{3}{2}}$ avec $-\dfrac{3}{2} \leqslant -1$. Donc, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$. Puisque la fonction $u \mapsto e^{-u}u^{-\frac{3}{2}}$ est positive, $F(0) = +\infty$ et en particulier, $F(0)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

• Si $x < 0$, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et positive sur $]0,-x[\cup]-x+\infty[$, est équivalente en $-x$ à $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{-x}} \times \dfrac{1}{u+x}$ et n'est donc pas intégrable sur un voisinage de $-x$. Dans ce cas, $F(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{D_F =]0,+\infty[= I.}$$

3) Soit $a > 0$. Posons $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,u) & \mapsto & \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \end{array}$ de sorte que pour tout $x \geqslant a$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(x,u)\,du$.

• Pour chaque x de $[a,+\infty[$, la fonction $u \mapsto \Phi(x,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

• Φ admet sur $[a,+\infty[\times]0,+\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par

$$\forall (x,u) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,u) = -\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}.$$

- Pour tout x de $[a,+\infty[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout u de $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,u)$ est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.
- Pour tout $(x,u) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,u)\right| = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} \leqslant \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2} = \varphi(u).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ car équivalente en 0 à $\dfrac{1}{a^2\sqrt{u}}$ et négligeable en $+\infty$ devant $\dfrac{1}{u^2}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $a>0$,

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x>0,\ F'(x)=\int_0^{+\infty} -\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,du.}$$

4) Une intégration par parties, licite au vu de l'intégralité de toutes les fonctions considérées, fournit

$$\begin{aligned}
xF'(x) &= -x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{-(x+u-u)e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\,du\\
&=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}e^{-u}}{(u+x)^2}\,du\\
&=-F(x)+\left[-\frac{\sqrt{u}e^{-u}}{(u+x)}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\left(-\sqrt{u}+\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\right)e^{-u}}{u+x}\,du\\
&=-F(x)+0+\frac{1}{2}F(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{u}e^{-u}}{u+x}\,du=-\frac{1}{2}F(x)-\int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du\\
&=-\frac{1}{2}F(x)-\int_0^{+\infty}\frac{(u+x-x)e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du=-\frac{1}{2}F(x)-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du+x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du\\
&=\left(x-\frac{1}{2}\right)F(x)-K,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall x>0,\ xF'(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)F(x)=-K.}$$

5) La fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable sur un voisinage de 0. Par suite, la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt=\int_0^1\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt+\int_1^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et a pour dérivée la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\forall x>0,\ xF'(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)F(x)=-K &\Rightarrow \forall x>0,\ F'(x)-\left(1-\frac{1}{2x}\right)F(x)=-\frac{K}{x}\\
&\Rightarrow \forall x>0,\ e^{-x+\frac{1}{2}\ln x}F'(x)+\left(-1+\frac{1}{2x}\right)e^{-x+\frac{1}{2}\ln x}F(x)=-\frac{Ke^{-x+\frac{1}{2}\ln x}}{x}\\
&\Rightarrow \forall x>0,\ G'(x)=-\frac{Ke^{-x}}{\sqrt{x}}\\
&\Rightarrow \exists C\in\mathbb{R}/\ \forall x>0,\ G'(x)=C-K\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt
\end{aligned}$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to0}G(x)=C$ (car $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur un voisinage de 0) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=C-K^2$.

Pour $x>0$, $0\leqslant G(x)=\sqrt{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(u+x)}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du\leqslant\sqrt{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(u+0)}}{\sqrt{u}(0+x)}\,du=\frac{K}{\sqrt{x}}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)=0$. On en déduit que

$$K^2=C=\lim_{x\to0}G(x).$$

Pour $x>0$, $G(x)=\sqrt{x}e^{-x}F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}e^{-(u+x)}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du$ et donc,

$$e^{-(\sqrt{x}+x)}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du \leqslant \int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}e^{-(u+x)}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du \leqslant G(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du.$$

En posant $u = xv^2$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xv^2}(xv^2+x)}\,2xv dv = 2\int_0^{+\infty}\frac{dv}{v^2+1} = \pi.$$

De même,

$$\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du = 2\int_0^{x^{-\frac{1}{4}}}\frac{dv}{v^2+1} = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right).$$

En résumé, $\forall x > 0$, $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\right) \leqslant G(x) \leqslant \pi$. Quand, x tend vers 0, le théorème des gendarmes fournit $C = \lim\limits_{x\to 0} G(x) = \pi$ et donc, (puisque $K > 0$)

$$\boxed{K = \sqrt{\pi}.}$$

B. Etude de deux séries de fonctions

7) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$.

Soit $x > 0$. Alors, $0 < e^{-x} < 1$ et donc $\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sqrt{n}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que les séries numériques de termes généraux respectifs $f_n(x)$ et $g_n(x)$ convergent et donc que $f(x)$ et $g(x)$ existent.

Les fonctions f et g sont définies sur I.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, +\infty[$ et $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$ où $f_n(a)$ est le terme général d'une série numérique convergente. Donc la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$. De même, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$ et $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(a)$ et donc la série de fonctions de terme général g_n converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$.

Toutes les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et toutes les fonctions g_n, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $[a, +\infty[$ et les séries de fonctions de termes généraux respectifs f_n et g_n convergent uniformément sur $[a, +\infty[$ vers les fonctions f et g respectivement. Donc, les fonctions f et g sont continues sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a montré que

$$\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont continues sur I.}}$$

8) Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \int_n^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\,du = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = f_n(x)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \geqslant \int_n^{n+1}\frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}}\,du = \frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}} = f_{n+1}(x)$. En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_1^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du.}$$

Soit $x > 0$. En posant $t = ux$, on obtient (d'après la question 6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t/x}}\,dt/x = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

D'autre part, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du - \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du$. De plus,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0,\ \sqrt{\frac{\pi}{x}} - 2 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Le théorème des gendarmes montre que $\dfrac{f(x)}{\sqrt{\pi/x}}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 et donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.}$$

9) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$. On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} < 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge et il en est de même de la suite $\left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

10) Soit $x > 0$. La série numérique de terme général $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ est le produit de Cauchy des séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-nx}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$.

Puisque ces deux séries numériques sont absolument convergentes, on en déduit que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ converge, ou encore $h(x)$ existe, et de plus

$$h(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}e^{-nx}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) = \frac{f(x)}{1-e^{-x}}.$$

11) Mais alors, $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Pour $x > 0$, avec les notations de la question 9,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)e^{-nx} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nx} = 2g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}$$

et donc

$$g(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}.$$

Pour $x > 0$, posons $k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}$ puis, pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $k_n(x) = u_n e^{-nx}$. Chaque fonction k_n est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$

$$0 \leqslant k_n(x) = u_n e^{-nx} \leqslant u_n$$

où u_n est le terme général d'une série numérique convergente d'après la question 9. On en déduit que la série de fonctions de terme général k_n est normalement et donc uniformément convergente sur $[0, +\infty[$ puis que la fonction k est continue sur $[0, +\infty[$ et donc continue en 0. En particulier, la fonction k est bornée sur un voisinage de 0. On en déduit que

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2}h(x) + \frac{1}{2}k(x) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) + O(1) \underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}}.}$$

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12) • Si A est fini (et non vide), on peut poser $m = \text{Max}(A)$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $n \geqslant m + 1$, $a_n e^{-nx} = 0$ et donc la série numérique de terme général $a_n e^{-nx}$ converge. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } A \text{ est fini, } I_A = \mathbb{R}^+.}$$

• Si A est infini, A est l'ensemble des valeurs d'une certaine fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \varphi(n) \end{array}$ strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x} < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n e^{-nx} \leqslant e^{-nx} = (e^{-x})^n$. Puisque la série géométrique de terme général $(e^{-x})^n$ converge, il en est de même de la série de terme général $a_n e^{-nx}$.
Si $x = 0$, la suite $\left(a_{\varphi(n)} e^{-\varphi(n)x}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(a_n e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ et ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$). Dans ce cas, la série de terme général $a_n e^{-nx}$ est grossièrement divergente.

$$\boxed{\text{si } A \text{ est infini, } I_A =]0, +\infty[.}$$

13) Dans tous les cas, $]0, +\infty[\subset I_A$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{card}(A(n)) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n,\ k\in A} 1 = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Soit $x > 0$. Alors $0 < e^{-x} < 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{card}(A(n))e^{-nx} = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx} e^{-(n-k)x}$. La série de terme général $\text{card}(A(n))e^{-nx}$ est le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes de terme généraux respectifs $a_n e^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$, et e^{-nx}, $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la série de terme général $\text{card}(A(n))e^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{card}(A(n))e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) = \frac{f_A(x)}{1 - e^{-x}}.$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}$. $A_1(n) = \left\{k \in \mathbb{N}^* / \ 1 \leqslant k^2 \leqslant n\right\}$ (donc $A_1(0)$ est vide puis $\text{card}\left(A_1(0)\right) = 0$). Pour $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $1 \leqslant k^2 \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant \left[\sqrt{n}\right]$ et donc $\text{card}\left(A_1(n)\right) = \left[\sqrt{n}\right]$ ce qui reste vrai quand $n = 0$. Mais alors, pour $x > 0$,

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{card}\left(A_1(n)\right) e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sqrt{n}\right] e^{-nx}.$$

Pour $x > 0$, $g(x) - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sqrt{n}\right] e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]\right) e^{-nx}$. On en déduit que

$$0 \leqslant g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

On en déduit encore que pour $x > 0$,

$$\left(1-e^{-x}\right) g(x) - 1 \leqslant f_{A_1}(x) \leqslant \left(1-e^{-x}\right) g(x).$$

D'après la question 11, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}}$ puis $(1-e^{-x})\,g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$. Le théorème des gendarmes montre alors que $\dfrac{f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}/2\sqrt{x}}$ tend vers 1 quand x tend vers 0 et donc que

$$\boxed{f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.}$$

En particulier, $xf_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\rightarrow} 0$. Donc,

$$\boxed{A_1 \in S \text{ et } \Phi\left(A_1\right) = 0.}$$

15) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in A_1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\nu(0) = 0$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\nu(n) = \text{card}\left\{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,/\, p^2+q^2 = n\right\} = \text{card}\left\{(k,l) \in (A_1)^2 \,/\, k+l = n\right\} = \sum_{\substack{(k,l)\in A_1^2\\ k+l=n}} 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Donc, pour $x > 0$, un produit de Cauchy fournit de nouveau,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n)e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right) = \left(f_{A_1}(x)\right)^2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est somme de deux carrés d'entiers non nuls} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Si n n'est pas somme de de deux carrés d'entiers non nuls, alors $b_n = 0 = \nu_n$ et si n est somme de deux carrés d'entiers non nuls, alors $b_n = 1 \leqslant \nu(n)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant \nu(n)$ puis, pour tout $x > 0$,

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n)e^{-nx} = \left(f_{A_1}(x)\right)^2.$$

Par suite, pour $x > 0$, $xf_{A_2}(x) \leqslant \left(\sqrt{x}f_{A_1}(x)\right)^2$ avec $\sqrt{x}f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après la question précédente. Quand x tend vers 0 (l'existence de $\Phi\left(A_2\right)$ étant admise, on obtient

$$\boxed{\Phi\left(A_2\right) \leqslant \frac{\pi}{4}.}$$

D. Un théorème taubérien

16) Soit $\psi \in E$. La fonction ψ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$ et donc la fonction ψ est bornée sur ce segment. Donc, $\|\psi\|_\infty$ existe dans $[0,+\infty[$.

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} \in [0,1]$ et donc $\psi\left(e^{-nx}\right) \leqslant \|\psi\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\alpha_n e^{-nx}\psi\left(e^{-nx}\right)\right| = \alpha_n e^{-nx}\psi\left(e^{-nx}\right) \leqslant \|\psi\|_\infty \alpha_n e^{-nx}.$$

Par hypothèse, la série numérique de terme général $\|\psi\|_\infty \alpha_n e^{-nx}$ converge et donc la série numérique de terme général $\alpha_n e^{-nx}\psi\left(e^{-nx}\right)$ est absolument convergente et donc convergente. Donc, $L(\psi)$ est définie sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, L est bien une application de E dans F. Vérifions que L est linéaire. Soient $(\psi_1, \psi_2) \in E^2$ puis $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}(L(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2))(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\left(\lambda_1\psi_1\left(e^{-nx}\right) + \lambda_2\psi_2\left(e^{-nx}\right)\right)\\ &= \lambda_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_1\left(e^{-nx}\right) + \lambda_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_2\left(e^{-nx}\right)\\ &= (\lambda_1 L(\psi_1) + \lambda_2 L(\psi_2))(x).\end{aligned}$$

Donc, $L(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1 L(\psi_1) + \lambda_2 L(\psi_2)$. On a montré que

$$\boxed{L \in \mathscr{L}(E, F).}$$

Soient ψ_1 et ψ_2 deux éléments de F tels que $\psi_1 \leqslant \psi_2$. Alors, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_1\left(e^{-nx}\right) \leqslant \psi_2\left(e^{-nx}\right)$ puis, puisque $\alpha_n e^{-nx} \geqslant 0$,

$$\alpha_n e^{-nx}\psi_1\left(e^{-nx}\right) \leqslant \alpha_n e^{-nx}\psi_2\left(e^{-nx}\right).$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient pour tout $x > 0$,

$$(L(\psi_1))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_1\left(e^{-nx}\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_2\left(e^{-nx}\right) = (L(\psi_1))(x)$$

et donc $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

17) $E_1 \subset E$.

• $L(0) = 0$ (car L est linéaire). Par suite, $\Delta(0)$ existe et $\Delta(0) = 0$. Donc, $0 \in E_1$.

• Soit $(\psi_1, \psi_2) \in E_1^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$x(L(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2))(x) = \lambda_1 x(L(\psi_1))(x) + \lambda_2 x(L(\psi_2))(x) \underset{x\to 0}{\rightarrow} \lambda_1\Delta(\psi_1) + \lambda_2\Delta(\psi_2) \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 \in E_1$ et $\Delta(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = \lambda_1\Delta(\psi_1) + \lambda_2\Delta(\psi_2)$.

Ainsi, E_1 est un sous-espace vectoriel de E et Δ est une forme linéaire sur E_1. Vérifions que Δ est continue sur l'espace vectoriel normé $(E_1, \| \|_\infty)$.

Soit $\psi \in E_1$. Pour $x > 0$,

$$|x(L(\psi))(x)| \leqslant x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\left|\psi\left(e^{-nx}\right)\right| \leqslant \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\right)\|\psi\|_\infty.$$

Quand x tend vers 0, on obtient $|\Delta(\psi)| \leqslant \ell\|\psi\|_\infty$. Ainsi, il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $\psi \in E_1$, $|\Delta(\psi)| \leqslant K\|\psi\|_\infty$. On sait alors que Δ est une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé $(E_1, \| \|_\infty)$.

18) Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction e_p est dans E. Pour $x > 0$,

$$x(L(e_p))(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} e_p\left(e^{-nx}\right) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x} = \frac{1}{p+1} \times (p+1)x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}.$$

Puisque $p + 1 > 0$, $(p+1)x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$ tend vers ℓ quand x tend vers 0 et donc $x(L(e_p))(x)$ tend vers $\dfrac{\ell}{p+1} \in \mathbb{R}$ quand x tend vers 0. On a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ e_p \in E_1 \text{ et } \Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1}.}$$

E_1 étant un sous-espace vectoriel de E, on en déduit encore que $\mathbb{R}[X] \subset E_1$ puis par linéarité de Δ, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$, alors

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(e_k) = \ell \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = \ell \int_0^1 P(t)\ dt.$$

Soit $\psi \in E_0$. D'après le théorème de WEIERSTRASS, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$. Il revient au même de dire que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ψ dans l'espace vectoriel normé $(E_0, \|\ \|_\infty)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\psi - P_n\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3(\ell+1)}$. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|x(L(\psi))(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt\right| &\leqslant |x(L(\psi))(x) - x(L(P_n))(x)| + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| \\
&\quad + \left|\ell\int_0^1 P_n(t)\ dt - \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt\right| \\
&\leqslant x\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{-kx}\left|\psi\left(e^{-kx}\right) - P_n\left(e^{-kx}\right)\right| + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| + \ell\|\psi - P_n\|_\infty \\
&\leqslant \left(x\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{-kx}\right)\|\psi - P_n\|_\infty + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| + \ell\frac{\varepsilon}{3(\ell+1)} \\
&\leqslant \left(x\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{-kx}\right)\frac{\varepsilon}{3(\ell+1)} + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| + \ell\frac{\varepsilon}{3(\ell+1)}
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} x\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{-kx} = \ell$, on peut choisir $\alpha_1 \in]0,1[$ tel que pour $x \in]0,\alpha_1]$, $x\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k e^{-kx} \leqslant \ell + 1$. Pour $x \in]0,\alpha_1]$, on a

$$\left|x(L(\psi))(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon(\ell+1)}{3(\ell+1)} + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| + \frac{\varepsilon(\ell+1)}{3(\ell+1)} = \frac{2\varepsilon}{3} + \left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right|.$$

Maintenant, d'après le début de la question, $\lim_{x\to 0} x(L(P_n))(x) = \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt$. Donc, on peut choisir $\alpha_2 \in]0,\alpha_1]$ tel que pour $x \in]0,\alpha_2]$, $\left|x(L(P_n))(x) - \ell\int_0^1 P_n(t)\ dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $x \in]0,\alpha_2]$, on a

$$\left|x(L(\psi))(x) - \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et que $\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x) = \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt$. On a montré que

$$\boxed{E_0 \subset E_1 \text{ et } \forall \psi \in E_0,\ \Delta(\psi) = \ell\int_0^1 \psi(t)\ dt.}$$

19) g_- est continue par morceaux sur $[0,1]$, continue sur $[0,a-\varepsilon]$, sur $]a-\varepsilon,a[$ et sur $[a,1]$. De plus, $\lim_{x\to a-\varepsilon,\ x>a-\varepsilon} g_-(x) = \frac{a-(a-\varepsilon)}{\varepsilon} = 1 = g_-(a-\varepsilon)$ et $\lim_{x\to a,\ x<a} g_-(x) = \frac{a-a}{\varepsilon} = 0 = g_-(a)$. Donc, $g_- \in E_0$.

g_+ est continue par morceaux sur $[0,1]$, continue sur $[0,a]$, sur $]a,a+\varepsilon[$ et sur $[a+\varepsilon,1]$. De plus, $\lim_{x\to a,\ x>a} g_+(x) = \frac{a+\varepsilon-a}{\varepsilon} = 1 = g_+(a)$ et $\lim_{x\to a+\varepsilon,\ x<a+\varepsilon} g_+(x) = \frac{(a+\varepsilon)-(a+\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 = g_+(a+\varepsilon)$. Donc, $g_+ \in E_0$.

Enfin,

$$\Delta\left(g_-\right) = \ell\int_0^1 g_-(t)\ dt = \ell\left(1\times(a-\varepsilon)+\varepsilon\times\frac{1+0}{2}\right) = \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et

$$\Delta\left(g_=\right) = \ell\int_0^1 g_+(t)\ dt = \ell\left(1\times a+\varepsilon\times\frac{1+0}{2}\right) = \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soit $x\in[0,1]$.

- Si $0\leqslant x\leqslant a-\varepsilon$, $g_-(x) = 1 = 1_{[0,a]}(x) = g_+(x)$ et en particulier, $g_-(x)\leqslant 1_{[0,a]}(x)\leqslant g_+(x)$.
- Si $a-\varepsilon\leqslant x\leqslant a$, $g_-(x) = \dfrac{a-x}{\varepsilon}\leqslant 1 = 1_{[0,a]}(x) = g_+(x)$ et en particulier, $g_-(x)\leqslant 1_{[0,a]}(x)\leqslant g_+(x)$.
- Si $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$, $g_-(x) = 0\leqslant 0 = 1_{[0,a]}(x)\leqslant\dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} = g_+(x)$ et en particulier, $g_-(x)\leqslant 1_{[0,a]}(x)\leqslant g_+(x)$.
- Si $a+\varepsilon\leqslant x\leqslant 1$, $g_-(x) = 0\leqslant 0 = 1_{[0,a]}(x)\leqslant 0 = g_+(x)$ et en particulier, $g_-(x)\leqslant 1_{[0,a]}(x)\leqslant g_+(x)$.

Finalement, $g_-\leqslant 1_{[0,a]}\leqslant g_+$. Puis, d'après la question 16,

$$\forall x>0,\ x\left(L\left(g_-\right)\right)(x)\leqslant x\left(L\left(1_{[0,a]}\right)\right)(x)\leqslant x\left(L\left(g_+\right)\right)(x).$$

On choisit alors $\alpha\in]0,1[$ tel que pour $x\in]0,\alpha]$, $x\left(L\left(g_-\right)\right)(x)\geqslant\Delta\left(g_-\right)-\ell\dfrac{\varepsilon}{2} = \ell(a-\varepsilon)$ et $x\left(L\left(g_+\right)\right)(x)\leqslant\Delta\left(g_+\right)+\ell\dfrac{\varepsilon}{2} = \ell(a+\varepsilon)$. Pour $x\in]0,\alpha]$, on a

$$\ell a-\ell\varepsilon\leqslant x\left(L\left(1_{[0,a]}\right)\right)(x)\leqslant\ell a+\ell\varepsilon.$$

On a montré que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0/\ \forall x\in]0,1],\ \left(0<x\leqslant\alpha\Rightarrow\left|x\left(L\left(1_{[0,a]}\right)\right)(x)-\ell a\right|\leqslant\ell\varepsilon\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} x\left(L\left(1_{[0,a]}\right)\right)(x) = \ell a$. Ainsi, $1_{[0,a]}\in E_1$ et

$$\Delta\left(1_{[0,a]}\right) = \ell a = \ell\int_0^1 1_{[0,a]}(t)\ dt.$$

Soit $(a,b)\in[0,1]^2$ tel que $a<b$. Alors, $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]}-1_{[0,a]}\in E_1$ puis par linéarité

$$\Delta\left(1_{[a,b]}\right) = \Delta\left(1_{[0,b]}\right)-\Delta\left(1_{[0,a]}\right) = \ell(b-a) = \ell\int_0^1 1_{[a,b]}(t)\ dt.$$

Le résultat est donc vrai pour toute fonction caractéristique de segment. Puisque E_1 est un sous-espace vectoriel de E, pour toute fonction ψ en escaliers sur $[0,1]$, $\psi\in E_1$ et par linéarité de Δ, $\Delta(\psi) = \ell\displaystyle\int_0^1\psi(t)\ dt$.

Soit enfin $\psi\in E$. On sait que ψ peut être uniformément approchée sur $[0,1]$ par une suite de fonctions en escaliers. Par un travail analogue à celui de la question 18, on a $\psi\in E_1$ et $\Delta(\psi) = \ell\displaystyle\int_0^1\psi(t)\ dt$. On a montré que $E_1\subset E$ et donc que $E_1 = E$ puis

$$\boxed{E_1 = E \text{ et } \forall\psi\in E,\ \Delta(\psi) = \ell\int_0^1\psi(t)\ dt.}$$

20) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Pour $n\in\mathbb{N}$, $e^{-\frac{n}{N}}\geqslant\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow-\dfrac{n}{N}\geqslant-1\Leftrightarrow n\leqslant N$. Donc,

$$(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N}\alpha_n e^{-\frac{n}{N}}\frac{1}{e^{-\frac{n}{N}}} = \sum_{n=0}^{N}\alpha_n.$$

ψ est dans E et donc dans E_1. De plus,

$$\int_0^1\psi(t)\ dt = \int_{\frac{1}{e}}^1\frac{1}{t}\ dt = -\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1.$$

Donc,

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \lim_{x\to 0}x\,(L(\psi))(x) = \Delta(\psi) = \ell\times 1 = \ell.$$

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \ell.}$$

21) Soit $A \in \mathcal{S}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\text{card}(A(n)) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. D'après la question précédente,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\text{card}(A(n)) = \lim_{x \to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = \Phi(A),$$

puis, d'après la question 15,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \nu(k) = \lim_{x \to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(n) e^{-nx} = \lim_{x \to 0} x \left(f_{A_1}(x)\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

