Concours commun Mines-Ponts

PREMIÈRE ÉPREUVE. FILIÈRE PC/PSI

A. Préliminaire

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait que pour tout réel $u \in]-1, 1[$,

$$(1+u)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} u^n.$$

Pour $x \in]-1, 1[$, le réel $u = -x$ est dans $]-1, 1[$ et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n.$$

$(-1)^0 \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}^{n \text{ facteurs}}}{n!} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+(n-1)\right)}{n!} \\ &= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots 3\times 1}{2^n n!} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2} \\ &= \frac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{((2n)\times(2n-2)\times\ldots 4\times 2)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$. Donc

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.}$$

B. Identité de Karatama

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1[$. $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{1-x}\ f\left(x^{p+1}\right)$. Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\sqrt{1-x}\ f\left(x^{p+1}\right) = \sqrt{\frac{1-x}{1-x^{p+1}}}\ \sqrt{1-x^{p+1}} f\left(x^{p+1}\right) \sim \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1}{1+x+\ldots+x^p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \ \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

3) Soit $p \in \mathbb{N}$. En posant $u = (p+1)t$, l'intégrale obtenue est convergente et

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{(p+1)t}}\,(p+1)dt = \sqrt{p+1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et $\displaystyle\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$. D'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt.$$

4) Posons $Q = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \alpha_p X^p$. Alors, pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q\left(x^k\right) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \sqrt{1-x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k}\right)$ (combinaison linéaire de séries convergentes) puis

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q\left(x^k\right) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \alpha_p \left(e^{-t}\right)^p}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q\left(e^{-t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt.$$

5) Soit $t \in]0,+\infty[$. Alors, $e^{-t} \in [0,1]$ puis $h\left(e^{-t}\right) = \begin{cases} e^t \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$ et donc $\displaystyle\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur un voisinage de 0 car $-\dfrac{1}{2} > -1$ et intégrable sur un voisinage de $+\infty$ car nulle sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right)$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$. On en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right)\,dt$ et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h\left(e^{-t}\right)\,dt = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2.$$

6) Soit $x \in [0,1[$. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x^k = 0$ et donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geqslant k_0$, $x^k \in \left[0, e^{-1}\right[$. Pour $k \geqslant k_0$, $a_k x^k h\left(x^k\right) = 0$. En particulier, la série numérique de terme général $a_k x^k h\left(x^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$, converge.

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $e^{-\frac{k}{n}} \geqslant e^{-1} \Leftrightarrow -\dfrac{k}{n} \geqslant -1 \Leftrightarrow k \leqslant n$. Par suite,

$$\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\frac{k}{n}} h\left(e^{-\frac{k}{n}}\right) = \sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}}\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-\frac{k}{n}} e^{\frac{k}{n}} = \sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $-\dfrac{1}{n}$ tend vers 0 et donc

$$\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{-\left(-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

D'autre part, puisque $e^{-\frac{1}{n}}$ tend vers 1, $\displaystyle\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\frac{k}{n}} h\left(e^{-\frac{k}{n}}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}h\left(e^{-t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt = 2$. Finalement, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$$

C. Théorème taubérien

8) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - [\alpha n] \neq 0$ (en particulier $n \geqslant 1$). $\alpha < 1 \Rightarrow \alpha n < n \Rightarrow [\alpha n] < n \Rightarrow n - [\alpha n] > 0$ puis

$$\begin{aligned} S_n - S_{[\alpha n]} &= \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \\ &\geqslant \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_n \text{ (car la suite } (a_k) \text{ est décroissante)} \\ &= (n - [\alpha n])\, a_n \end{aligned}$$

et donc $\dfrac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \geqslant a_n$ car $n - [\alpha n] > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - [\beta n] \neq 0$ (en particulier $n \geqslant 1$). $\beta > 1 \Rightarrow \beta n > n \Rightarrow [\beta n] \geqslant n \Rightarrow [\beta n] > n \Rightarrow [\beta n] - n > 0$ puis

$$\begin{aligned} S_{[\beta n]} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{k=[\beta n]} n a_k \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{k=[\beta n]} n a_n \text{ (car la suite } (a_k) \text{ est décroissante)} \\ &= ([\beta n] - n)\, a_n \end{aligned}$$

et donc $\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant a_n$ car $[\beta n] - n > 0$.

En résumé, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - [\alpha n] \neq 0$ et $n - [\beta n] \neq 0$, $\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$.

9) Soit $\gamma > 0$. Pour n suffisamment grand, $0 < \gamma n - 1 \leqslant [\gamma n] \leqslant \gamma n$ puis

$$\frac{n}{\gamma n} \leqslant \frac{n}{[\gamma n]} \leqslant \frac{n}{\gamma n - 1}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{n}{[\gamma n]}$ tend vers $\dfrac{1}{\gamma}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour n suffisamment grand, $\dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{[\gamma n]}}\sqrt{\dfrac{[\gamma n]}{n}}$ et donc $\dfrac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\gamma}$.

10) $n - [\alpha n] \geqslant n - \alpha n = (1 - \alpha)n$ et $[\beta n] - n \geqslant \beta n - 1 - n = (\beta - 1)n - 1$. Puisque $1 - \alpha > 0$ et $\beta - 1 > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $n - [\alpha n] > 0$ et $[\beta n] - n > 0$ et en particulier, $n - [\alpha n] \neq 0$ et $[\beta n] - n \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 10, pour $n \geqslant n_0$,

$$\sqrt{n}\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant \sqrt{n} a_n \leqslant \sqrt{n}\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

Pour $n \geqslant n_0$, $\sqrt{n}\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{\dfrac{[\beta n]}{n} - 1} = \left(\dfrac{S_{[\beta n]}}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{1}{\dfrac{[\beta n]}{n} - 1}$. Cette expression tend vers $\left(2\sqrt{\beta} - 2\right)\dfrac{1}{\beta - 1} = \dfrac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, $\sqrt{n}\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \geqslant \dfrac{2\left(\sqrt{\beta} - 1\right)}{\beta - 1} - \varepsilon$.

De même, Pour $n \geqslant n_0$, $\sqrt{n}\dfrac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} = \left(\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{1}{1 - \dfrac{[\alpha n]}{n}}$. Cette expression tend vers $\dfrac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc, il existe un rang n_2 tel que pour $n \geqslant n_2$, $\sqrt{n}\dfrac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \leqslant \dfrac{2\left(1 - \sqrt{\alpha}\right)}{1 - \alpha} + \varepsilon$.

Pour $n \geqslant N = \max\{n_0, n_1, n_2\}$,

$$\frac{2\left(\sqrt{\beta}-1\right)}{\beta-1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n-[\alpha n]} \leqslant \frac{2\left(1-\sqrt{\alpha}\right)}{1-\alpha} + \varepsilon.$$

11) Quand β tend vers 1 par valeurs supérieures, $\dfrac{2\left(\sqrt{\beta}-1\right)}{\beta-1} = \dfrac{2}{\sqrt{\beta}+1}$ tend vers 1. On peut donc choisir $\beta_0 > 1$ tel que $\dfrac{2\left(\sqrt{\beta_0}-1\right)}{\beta_0-1} \geqslant 1-\varepsilon$.

De même, quand α tend vers 1 par valeurs inférieures, $\dfrac{2\left(1-\sqrt{\alpha}\right)}{1-\alpha} = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}+1}$ tend vers 1. On peut donc choisir $\alpha_0 < 1$ tel que $\dfrac{2\left(1-\sqrt{\alpha_0}\right)}{1-\alpha_0} \leqslant 1+\varepsilon$.

α_0 et β_0 étant ainsi fixés, on choisit N comme ci-dessus. Pour $n \geqslant N$, on a

$$1-2\varepsilon \leqslant \sqrt{n}\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n-[\alpha n]} \leqslant 1+2\varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant N$, $\left|\sqrt{n}a_n - 1\right| \leqslant 2\varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = 1$.

D. Marche aléatoire

12) Soient $n \geqslant 2$ puis $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$. Puisque les variables X_i sont indépendantes,

$$P\left(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}\right) = \prod_{l=1}^{n-k} P\left(X_{k+l} = i_l\right) = \frac{1}{2^{n-k}} = P\left(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}\right).$$

13) Soit $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$.

$$\left\{\begin{array}{l} S_{k+1} - S_k = j_1 \\ S_{k+2} - S_k = j_2 \\ \quad\vdots \\ S_{n-1} - S_k = j_{n-k-1} \\ S_n - S_k = j_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+1} + X_{k+2} = j_2 \\ \quad\vdots \\ X_{k+1} + \ldots + X_{n-1} = j_{n-k-1} \\ X_{k+1} + \ldots + X_{n-1} + X_n = j_{n-k} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \\ X_{n-1} = j_{n-k-1} - j_{n-k-2} \\ \quad\vdots \\ X_{k+2} = j_2 - j_1 \\ X_{k+1} = j_1 \end{array}\right.$$

Donc, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) &= P\left(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}\right) \\ &= P\left(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}\right). \end{aligned}$$

Ensuite, $\left\{\begin{array}{l} X_1 = j_1 \\ X_2 = j_2 - j_1 \\ \quad\vdots \\ X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} S_1 = j_1 \\ S_2 = j_2 \\ \quad\vdots \\ S_{n-k} = j_{n-k-1} \end{array}\right.$ et donc

$$\begin{aligned} P\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) &= P\left(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}\right) \\ &= P\left(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}\right). \end{aligned}$$

14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P\left(E_0\right) = P(T > 0) = 1$ et donc $P\left(A_n^n\right) = P\left(S_n = 0\right) = P\left(S_n = 0\right) P\left(E_0\right)$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$P\left(A_k^n\right) = P\left(\left(S_k = 0\right) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i \neq 0\right)\right) = P\left(S_k = 0\right) \times P_{S_k=0}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i \neq 0\right)\right) = P\left(S_k = 0\right) \times P_{S_k=0}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i - S_k \neq 0\right)\right).$$

Chaque $S_i - S_k$, $k+1 \leqslant i \leqslant n$, n'est fonction que de $X_{k+1}, \dots, X_n$ et S_k n'est fonction que de $X_1, \dots, X_k$. D'après le lemme des coalitions, $\bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i - S_k \neq 0\right)$ et S_k sont des variables indépendantes et donc

$$P\left(A_k^n\right) = P\left(S_k = 0\right) \times P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i - S_k \neq 0\right)\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \left(S_i - S_k \neq 0\right)\right) &= P\left(\bigcup_{j_1 \neq 0, \ldots, j_{n-k} \neq 0} \left(S_{k+1} - S_k = j_i, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}\right)\right) \\
&= \sum_{j_1 \neq 0, \ldots, j_{n-k} \neq 0} P\left(S_{k+1} - S_k = j_i, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) \text{ (événements deux à deux disjoints)} \\
&= \sum_{j_1 \neq 0, \ldots, j_{n-k} \neq 0} P\left(S_1 = j_i, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k}\right) \text{ (d'après la question 13)} \\
&= P\left(\bigcup_{j_1 \neq 0, \ldots, j_{n-k} \neq 0} \left(S_1 = j_i, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k}\right)\right) \\
&= P(T > n-k) = P\left(E_{n-k}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P\left(A_k^n\right) = P\left(S_k = 0\right) \times P\left(E_{n-k}\right).}$$

15) Si $n = 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(S_k\right) P\left(E_{n-k}\right) = P\left(S_0 = 0\right) P\left(T > 0\right) = 1 \times 1 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$. $\{i \in [\![0, n]\!] /\ S_i(\omega) = 0\}$ est une partie non vide (car contient 0) et majorée (par n) de $\mathbb{N}$. Soit $k = \text{Max}\{i \in [\![0, n]\!] /\ S_i(\omega) = 0\}$. On a $\omega \in A_k^n$ (y compris si $k = n$). Donc, $\Omega \displaystyle\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} A_k^n$. Puisque d'autre part, les A_n^k, $0 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux disjoints,

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(S_k\right) P\left(E_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(A_k^n\right) = 1.$$

16) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P\left(S_n = 0\right) \leqslant 1$ et $0 \leqslant P\left(E_n\right) \leqslant 1$. Donc, les séries entières $\sum P\left(S_n = 0\right) x^n$ et $\sum P\left(E_n\right) x^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En effectuant le produit de Cauchy de ces deux séries entières, pour $x \in]-1, 1[$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n = 0\right) x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P\left(S_k = 0\right) P\left(E_{n-k}\right)\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

17) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $\omega \in \Omega$ puis $k = \text{card}\{i \in [\![1, n]\!] /\ X_i(\omega) = 1\}$. Alors, $S_n(\omega) = k - (n-k) = 2k - n$. Par suite, si $S_n(\omega) = 0$, n est nécessairement pair.

- Si n est impair, pour tout $\omega \in \Omega$, $P\left(S_n = 0\right) = 0$.
- Si n est pair, posons $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$. $P\left(S_{2p} = 0\right) = \dfrac{N}{2^{2p}}$ où N est le nombre de n-uplets $\left(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2p}\right) \in \{-1, 1\}^{2p}$ comportant exactement p composantes égales à 1. $N = \dbinom{2p}{p}$ puis $P\left(S_{2p} = 0\right) = \dfrac{\dbinom{2p}{p}}{2^{2p}} = \dfrac{\dbinom{2p}{p}}{4^p}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ P\left(S_{2p+1} = 0\right) = 0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ P\left(S_{2p} = 0\right) = \frac{\dbinom{2p}{p}}{4^p}.}$$

18) Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question 1),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(S_n = 0\right) x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'après la question 16),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n = \frac{1}{1-x} \times \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.}$$

19) Pour $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, P\left(E_n\right)$. D'après ce qui précède, pour tout réel x de $]-1,1[$, la série de terme général $a_n x^n$ est absolument convergente. De plus, pour $x \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{1-x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Par suite, $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{\pi}$. D'après la question 7), $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T > n+1) \subset (T > n)$ et donc la suite $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs. D'après la question 11), $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} a_n = 1$ et donc

$$\boxed{P\left(E_n\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.}$$

20) $(T = +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Puisque la suite $\left(E_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, on sait que

$$P(T = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} P\left(E_n\right) = 0.$$

21) Soit $x \in [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(P\left(T > n-1\right) - P\left(T > n\right)\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(T > n-1\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(T > n\right) x^n \\
&= P(T > -1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(E_{n-1}\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n = P(T > -1) + x \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(E_{n-1}\right) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n \\
&= 1 + (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(E_n\right) x^n = 1 - (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ (d'après la question 18)} \\
&= 1 - \sqrt{1-x^2} \text{ (car } 1-x > 0\text{)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}.}$$

22) Soit $x \in]-1,1[$.

$$1 - \sqrt{1-x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^{n+1}\frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} = \frac{\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\ldots\left((n-1)-\dfrac{1}{2}\right)}{n!} \\
&= \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2^n n!} = \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2n-3)\times(2n-2)\times(2n-1)\times(2n)}{2\times 4\times\ldots\times(2n-2)\times(2n-1)\times(2n)\times 2\times 4\times\ldots\times(2n-2)\times(2n)} \\
&= \frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{2n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.
\end{aligned}
$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T=2n) = \frac{1}{2n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.}$$

