Les nombres complexes

I. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Forme algébrique d'un nombre complexe

1) Définition des nombres complexes

a) Un nombre mystérieux : le nombre $\sqrt{2}$

Au collège, on découvre la notion de racine carrée. Dans certains cas, cette racine carrée est très simple et elle ne fournit pas un nombre nouveau : $\sqrt{9} = 3$ car $3 \times 3 = 9$ ou $\sqrt{16} = 4$ car $4 \times 4 = 16$.

Le premier « nombre mystérieux » apparaissant dans la scolarité est le nombre $\sqrt{2}$. Ce nombre n'est ni 1 car $1 \times 1 = 1$ qui est plus petit que 2 ni 2 car $2 \times 2 = 4$ qui est plus grand que 2. Le nombre $\sqrt{2}$ est quelque part entre 1 et 2. Puisque $1,4^2 = 1,96$, le nombre $\sqrt{2}$ est un peu plus grand que $1,4$ et puisque $1,5^2 = 2,25$, le nombre $\sqrt{2}$ est un peu plus petit que $1,5$. En affinant ce travail, on trouve $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ On peut en fait obtenir autant de décimales que l'on veut mais on obtient toujours un nombre fini de décimales. On n'obtient donc jamais la valeur exacte de $\sqrt{2}$ car on sait démontrer en maths que le nombre $\sqrt{2}$ a une infinité de décimales non nulles et que la suite de ses décimales n'est pas périodique. Le nombre $\sqrt{2}$ reste donc en partie inconnu. On sait que son carré est égal à 2 mais on n'est pas capable d'en donner une valeur exacte. On pourrait même mettre en doute son existence si le théorème de Pythagore ne nous fournissait pas un segment de longueur $\sqrt{2}$: la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est égale à $\sqrt{2}$. Pour accepter ce nombre comme réel, il a fallu faire preuve d'une certaine capacité d'abstraction.

Nous allons maintenant franchir un cran dans l'abstraction car **nous allons définir un nouveau « nombre mystérieux » : un nombre dont le carré est égal à -1.** Le besoin de disposer d'un tel nombre s'est fait sentir à partir du XVI ème siècle. Nous avons fourni en annexe de ce cours un bref historique. Nous vous invitons à le lire une fois que vous aurez appris au moins les paragraphes I, II et III de ce chapitre.

b) Les nombres complexes

On admet que l'on peut construire un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$ tel que :

Théorème 1 et définition 1.
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ et qui obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{C}$ contient un nombre, noté i, tel que $i^2 = -1$,
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $x + iy$ où x et y sont deux réels.

Remarque. Le nombre i n'appartient pas à $\mathbb{R}$ car aucun nombre réel n'a pour carré le nombre -1. Dit autrement, le nombre i n'est pas réel. La lettre i est en fait l'initiale du mot « impossible ».

Explication. Dire que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolongent l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ veut dire que si z et z' sont deux nombres complexes qui sont en particulier tous les deux des réels alors $z + z'$ et $z \times z'$ ont respectivement pour valeur la somme habituelle des deux réels z et z' et le produit habituel des deux réels z et z'.

Vocabulaire. Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent les **nombres complexes**. L'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) ou encore un nombre réel est un nombre complexe particulier. On donne au passage différents ensembles de nombres :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{entiers} & & \text{entiers} & & \text{nombres} & & \text{nombres} & & \text{nombres} & & \text{nombres} \\
\text{naturels} & & \text{relatifs} & & \text{décimaux} & & \text{rationnels} & & \text{réels} & & \text{complexes} \\
\mathbb{N} & \underset{\neq}{\subset} & \mathbb{Z} & \underset{\neq}{\subset} & \mathbb{D} & \underset{\neq}{\subset} & \mathbb{Q} & \underset{\neq}{\subset} & \mathbb{R} & \underset{\neq}{\subset} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Exemples. Les nombres $3 + 2i$ ou $-i$ ou 0 ou π ou $1 - i\sqrt{2}$ ou 3 sont des nombres complexes.
Le nombre 2 est un entier naturel. Le nombre -3 est un entier relatif qui n'est pas un entier naturel.
Le nombre $3,7$ est un nombre décimal qui n'est pas un entier relatif. Le nombre $\dfrac{1}{3}$ est un nombre rationnel qui n'est pas un nombre décimal. Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel.
Le nombre i est un nombre complexe qui n'est pas un nombre réel.

2) Forme algébrique d'un nombre complexe. Parties réelle et imaginaire

On vérifie maintenant que l'écriture d'un nombre complexe sous la forme $x + iy$, où x et y sont deux réels, est unique.

Théorème 2. **1)** Soient x et y deux réels. Si $x + iy = 0$ alors $x = y = 0$.
2) Soient x, x', y et y' quatre réels. Si $x + iy = x' + iy'$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

Démonstration. **1)** Soient x et y deux réels tels que $x + iy = 0$. Supposons que y soit non nul. On peut alors écrire $i = -\frac{x}{y}$ et en particulier, i est un réel. Ceci est faux et il était donc absurde de supposer y non nul. On en déduit que $y = 0$ puis que $x = 0$.

2) Soient x, x', y et y' quatre réels tels que $x + iy = x' + iy'$. Alors $(x - x') + i(y - y') = 0$. Comme les nombres $x - x'$ et $y - y'$ sont deux réels, le résultat 1) permet d'affirmer que $x - x' = y - y' = 0$ puis que $x = x'$ et $y = y'$.

Le théorème précédent signifie entre autres que l'écriture d'un nombre complexe sous la forme $x + iy$ est unique. On peut réexprimer ce résultat en disant que si x, y, x' et y' sont quatre réels tels que $x + iy = x' + iy'$, alors on peut **identifier les coefficients** et donc écrire $x = x'$ et $y = y'$.

Danger. Dans le théorème précédent, il est essentiel que x et y soient des **réels**.
Par exemple, $1 + i \times i = 0 = 0 + 0 \times i$ et pourtant $1 \neq 0$ et $i \neq 0$.

Le théorème 2 justifie la définition suivante :

Définition 2. L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont deux réels s'appelle **la forme algébrique** d'un nombre complexe.
Si x et y sont deux réels, le nombre x est la **partie réelle** de $x + iy$ et le nombre y est la **partie imaginaire** de $x + iy$.

Notation. Si z est un nombre complexe, sa partie réelle se note $\mathrm{Re}(z)$ et sa partie imaginaire se note $\mathrm{Im}(z)$. On peut donc écrire

$$\text{pour tout nombre complexe } z,\ z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z).$$

Remarque. Le théorème 2 dit que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Exemples. La partie réelle de $3 - 2i$ est 3 et la partie imaginaire de $3 - 2i$ est -2. La partie réelle de $5i$ est 0 et la partie imaginaire de $5i$ est 5. La partie réelle de 4 est 4 et la partie imaginaire de 4 est 0.

Remarque. La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe sont deux nombres réels.
Par exemple, la partie imaginaire de $3 + 2i$ est 2 et n'est pas $2i$.

Définition 3. Les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle sont les **nombres réels**.
Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont les **imaginaires purs**.

Dit autrement, pour tout nombre complexe z,

1) z est réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$,
2) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.

Remarque. Le nombre 0 est à la fois réel et imaginaire pur. C'est d'ailleurs le seul nombre complexe à la fois réel et imaginaire pur.
Les nombres non réels du type $3 - 2i$ sont quelquefois appelés « nombres imaginaires » mais ce vocabulaire est en contradiction avec le fait d'avoir classé le nombre réel 0 parmi les imaginaires purs.

3) Opérations sur les nombres complexes

a) Définition des opérations dans $\mathbb{C}$

Définition 4. On définit l'addition et la multiplication des nombres complexes de la façon suivante :
1) Pour tous réels x, x', y et y', $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$.
2) Pour tous réels x, x', y et y', $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.

Remarque. Quand $x = x' = 0$ et $y = y' = 1$, on obtient $i^2 = (0 + 1 \times i)(0 + 1 \times i) = (-1) + 0 \times i = -1$.

Théorème 3. L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$:
1) Pour tous complexes z et z', $z + z' = z' + z$ et $z \times z' = z' \times z$.
2) Pour tous complexes z, z' et z'', $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z \times z') \times z'' = (z \times z') \times z''$.
3) Pour tout complexe z, $z + 0 = z$ et $z \times 1 = z$.
4) Pour tout complexe z, $z + (-z) = 0$.
5) Pour tous complexes z, z' et z'', $(z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$.
6) Pour tout complexe z, $z \times 0 = 0$.

Démonstration. Certains des résultats précédents sont immédiats. D'autres sont fastidieux à démontrer. Nous ne démontrerons ici que le 5).

Soient z, z' et z'' trois nombres complexes. Posons $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ et $z'' = x'' + iy''$ où x, x', x'', y, y' et y'' sont six réels.

$$\begin{aligned}
z \times z'' + z' \times z'' &= (x + iy)(x'' + iy'') + (x' + iy')(x'' + iy'') \\
&= (xx'' - yy'') + i(xy'' + yx'') + (x'x'' - y'y'') + i(x'y'' + y'x'') \\
&= xx'' + x'x'' - yy'' - y'y'' + i(xy'' + x'y'' + yx'' + y'x'') \\
&= ((x + x')x'' - (y + y')y'') + i((x + x')y'' + (y + y')x'') = ((x + x') + i(y + y'))(x'' + iy'') \\
&= (z + z')z''.
\end{aligned}$$

Dans la liste des propriétés énoncées plus haut, il manque un résultat sur l'inverse d'un nombre complexe non nul. Nous analyserons le problème de l'existence de l'inverse d'un nombre complexe non nul dans le paragraphe suivant.

Puisque les règles de calcul sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$, on a aussi à disposition des identités remarquables :

Théorème 4. **1)** Pour tous complexes z et z', $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$.
2) Pour tous complexes z et z', $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$.
3) Pour tous complexes z et z', $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$.
4) Pour tous complexes z et z', $(z + z')^3 = z^2 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$.
5) Pour tous complexes z et z', $(z - z')^3 = z^2 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3$.

Démonstration. Soient z et z' deux nombres complexes.
1) $(z + z')^2 = (z + z') \times (z + z') = z^2 + zz' + z'z + z'^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$.
2) En remplaçant z' par $-z'$, on obtient $(z - z')^2 = (z + (-z'))^2 = z^2 + 2z(-z') + (-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$.
3) $(z - z')(z + z') = z^2 + zz' - zz' - z'^2 = z^2 - z'^2$.
4)

$$\begin{aligned}
(z + z')^3 &= (z + z')^2 \times (z + z') = (z^2 + 2zz' + z'^2)(z + z') = z^3 + 2z^2z' + z'^2z + z^2z' + 2zz'^2 + z'^3 \\
&= z^2 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3,
\end{aligned}$$

5) En remplaçant z' par $-z'$, on obtient

$$(z - z')^3 = (z + (-z'))^3 = z^2 + 3z^2(-z') + 3z(-z')^2 + (-z')^3 = z^2 - 3z^2z' + 3zz'^2 - z'^3.$$

Exercice 1. Calculer les nombres complexes suivants :
1) $z_1 = 3 + 2i - 4 + 4i + 2(7 - i)$.
2) $z_2 = (3 - i)(4 + 3i)$.
3) $z_3 = (4 - i)^2 - (1 + 2i)(1 - i)$.

Solution. **1)** $z_1 = 3 + 2i - 4 + 4i + 2(7 - i) = (3 - 4 + 14) + i(2 + 4 - 2) = 13 + 4i$.
2) $z_2 = (3 - i)(4 + 3i) = 12 + 9i - 4i - 3i^2 = 12 + 5i + 3 = 15 + 5i$.
3) $z_3 = (4 - i)^2 - (1 + 2i)(1 - i) = (16 - 8i + i^2) - (1 - i + 2i - 2i^2) = (16 - 8i - 1) - (1 - i + 2i + 2)$
$= (15 - 8i) - (3 + i) = 15 - 8i - 3 - i = 12 - 9i$.

Commentaire. **1)** L'expression « calculer le nombre complexe » signifie : obtenir la forme algébrique de ce nombre complexe, forme sous laquelle on peut lire sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2) Les calculs précédents montrent bien la première difficulté que l'on rencontre quand on calcule avec des nombres complexes : l'égalité $i^2 = -1$ qui est cause de nombreuses erreurs de signe. Nous vous conseillons d'être patient ou patiente et, dans un premier temps, de faire beaucoup d'étapes de calcul, l'idéal étant de ne faire qu'une seule chose par étape. Le professionalisme viendra plus tard.

b) Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul. On va montrer ci-dessous que z admet un inverse (c'est-à-dire que $\frac{1}{z}$ existe) et on va apprendre à déterminer cet inverse. Pour cela, on donne d'abord une nouvelle identité remarquable dans $\mathbb{C}$, utile par la suite.

Théorème 5. Pour tous réels x et y, $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$.

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels.

$$(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2-i^2y^2=x^2+y^2.$$

Remarque. L'identité précédente se lit aussi de droite à gauche : $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$. Dans $\mathbb{R}$, on a pas de factorisation intéressante de x^2+y^2 mais ce n'est plus le cas dans $\mathbb{C}$.

On peut maintenant démontrer que tout nombre complexe non nul a un inverse et donner cet inverse :

Théorème 6. Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un nombre complexe z' tel que $z\times z'=1$.
z' est l'inverse de z ou encore $z'=\dfrac{1}{z}$.
De plus, si on pose $z=x+iy$ où x et y sont deux réels, alors $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Démonstration. Soit z un nombre complexe non nul. Posons $z=x+iy$ où x et y sont deux réels.

Puisque z n'est pas nul, l'un au moins des deux réels x ou y n'est pas nul. On en déduit que x^2 et y^2 sont deux réels positifs, l'un au moins de ces deux réels étant strictement positif puis que x^2+y^2 est un réel strictement positif. En particulier, le réel x^2+y^2 n'est pas nul.

On divise alors les deux membres de l'identité remarquable du théorème 5 par le réel non nul x^2+y^2 et on obtient $(x+iy)\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=1$, ce qui démontre le résultat.

La démonstration du théorème précédent fournit implicitement le procédé utilisé dans la pratique pour calculer l'inverse de $x+iy$ où x et y sont deux réels tels que $x+iy\neq 0$:

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{1}{x+iy}$ par le nombre $x-iy$ (le nombre $x-iy$ s'appelle le **conjugué** du nombre $x+iy$ et sera étudié au paragraphe *III*). L'effet de cette transformation est de **rendre réel le dénominateur**. Une fois ce travail effectué, on a effectivement calculé le nombre $\dfrac{1}{x+iy}$ car on peut maintenant donner sa partie réelle $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ et sa partie imaginaire $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

A connaître. Puisque $i\times(-i)=-i^2=1$,

$$\frac{1}{i}=-i \text{ et } \frac{1}{-i}=i.$$

Exercice 2. Calculer les nombres complexes suivants :
1) $z_1=\dfrac{1}{3-2i}$.
2) $z_2=\dfrac{4+i}{1+2i}$.

Solution. **1)** $z_1=\dfrac{1}{3-2i}=\dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i}{3^2+(-2)^2}=\dfrac{3+2i}{13}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$.

2) $z_2=\dfrac{4+i}{1+2i}=\dfrac{(4+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{4-8i+i-2i^2}{1^2+2^2}=\dfrac{6-7i}{5}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{7}{5}i$.

Commentaire. Dans les deux calculs, on a utilisé l'identité remarquable $(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. Par exemple, pour $(3-2i)(3+2i)$, $x=3$ et $y=-2$ (et non pas $y=-2i$) puis $(3-2i)(3+2i)=x^2+y^2=3^2+(-2)^2$.

Théorème 7. Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout nombre complexe z, $0\times z=0$.
Réciproquement, soient z et z' deux nombres complexes tels que $z\times z'=0$. Si $z\neq 0$, alors $\dfrac{1}{z}$ existe puis

$$z\times z'=0\Rightarrow \frac{1}{z}\times z\times z'=\frac{1}{z}\times 0\Rightarrow z'=0.$$

Ainsi, si $z \times z' = 0$, l'un des deux nombres complexes z ou z' est forcément nul.

---

c) Equations du premier degré dans $\mathbb{C}$

Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ et soit (E) l'équation $az + b = 0$ d'inconnue z.
Pour résoudre cette équation du premier degré dans $\mathbb{C}$, on ne pose pas $z = x + iy$ où x et y sont deux réels pour chercher ensuite x et y mais on cherche directement le nombre complexe z :

$$az + b = 0 \Leftrightarrow az + b - b = 0 - b \Leftrightarrow az = -b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \times a \times z = \frac{1}{a} \times (-b) \Leftrightarrow z = -\frac{b}{a}.$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $(3-i)z + 1 + 5i = 0$.
2) $((4-3i)z - 5)((1+i)z + 1 - i) = 0$.

Solution. 1) Soit z un nombre complexe.

$$(3-i)z + 1 + 5i = 0 \Leftrightarrow (3-i)z = -1 - 5i \Leftrightarrow z = \frac{-1-5i}{3-i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1-5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-3 - i - 15i + 5}{3^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow z = \frac{2 - 16i}{10} \Leftrightarrow z = \frac{1-8i}{5}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i\right\}$.

2) Soit z un nombre complexe. $((4-3i)z - 5)((1+i)z + 1 - i) = 0 \Leftrightarrow (4-3i)z - 5 = 0$ ou $(1+i)z + 1 - i = 0$.

$$(4-3i)z - 5 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5}{4-3i} \Leftrightarrow z = \frac{5(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} \Leftrightarrow z = \frac{5(4+3i)}{4^2 + (-3)^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{5(4+3i)}{25} \Leftrightarrow z = \frac{4+3i}{5}.$$

et

$$(1+i)z + 1 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-1+i+i+1}{1^2+1^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2i}{2} \Leftrightarrow z = i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{i, \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$.

Exercice 4. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = \dfrac{(1+2i)z - 1}{(3+i)z - 1}$
1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

Solution. 1) On note D_f le domaine de définition de la fonction f.

Soit z un nombre complexe. $f(z)$ existe si et seulement si $(3+i)z - 1 \neq 0$. Or

$$(3+i)z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3+i} \Leftrightarrow z = \frac{3-i}{(3+i)(3-i)}z = \frac{3-i}{10}.$$

Donc $D_f = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i\right\}$.

2) Soit z un nombre complexe.

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+2i)z - 1}{(3+i)z - 1} = 0 \Leftrightarrow (1+2i)z - 1 = 0 \text{ et } (3+i)z - 1 \neq 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1+2i} \text{ et } z \neq \frac{3-i}{10}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1-2i}{5}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right\}$.

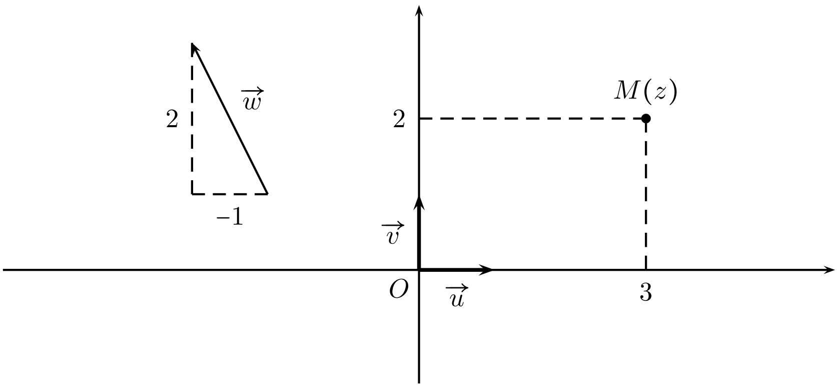
II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

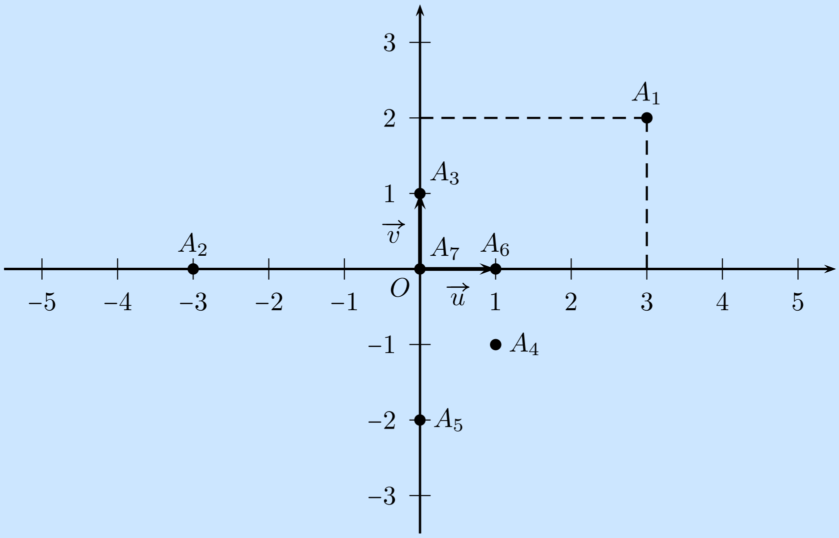
Remarque. Quand on fait de la géométrie faisant intervenir les nombres complexes, on ne peut pas noter $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ le repère car la lettre i est déjà utilisée pour désigner un certain nombre complexe.

Vocabulaire. A tout point M de coordonnées (x, y), on peut associer le nombre complexe $z_M = x + iy$. On dit alors que z_M est l'**affixe** du point M. Pour noter le fait qu'un nombre complexe z est l'affixe d'un certain point M, on peut écrire $M(z)$.
A tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées (x, y), on peut associer le nombre complexe $z_{\overrightarrow{w}} = x + iy$. On dit alors que $z_{\overrightarrow{w}}$ est l'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{w}$. Pour noter le fait qu'un nombre complexe z est l'affixe d'un certain vecteur $\overrightarrow{w}$, on peut écrire $\overrightarrow{w}(z)$.
Inversement, si $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, le point M de coordonnées (x, y) est l'**image ponctuelle** du nombre complexe z dans le plan et le point $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x, y) est l'**image vectorielle** du nombre complexe z dans le plan.

Construisons le point M d'affixe $z = 3 + 2i$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z' = -1 + 2i$.



Exercice 5. 1) Déterminer les affixes des points suivants :

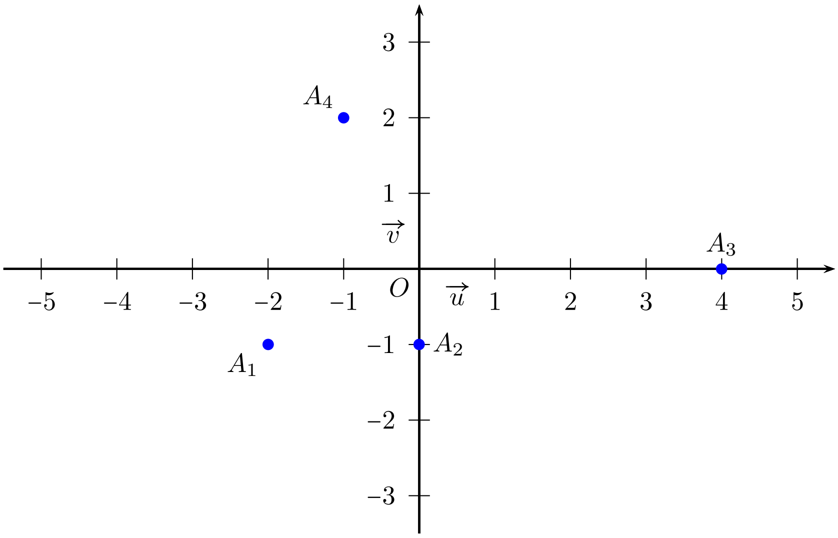


2) Placer les points d'affixes respectives $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 4$ et $z_4 = -1 + 2i$.

Solution. 1) On note z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 et z_7 les affixes des points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_7.

$z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -3$, $z_3 = i$, $z_4 = 1 - i$, $z_5 = -2i$, $z_6 = 1$ et $z_7 = 0$.

2) On note A_1, A_2, A_3 et A_4 les images ponctuelles des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4.



Théorème 8. **1)** Soient A et B deux points. L'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

2) Soient A, B et C trois points. L'affixe du centre de gravité G du triangle ABC est $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

3) Soient A et B deux points. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

4) a) Soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$ deux vecteurs. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'$ est $z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}'} = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w}'}$.

b) Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur et k un réel. L'affixe du vecteur $k\overrightarrow{w}$ est $z_{k\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w}}$.

Démonstration. **1)** Notons respectivement (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées des points A et B dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Les coordonnées du point I dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$. Donc, l'affixe du point I est

$$z_I = \frac{x_A + x_B}{2} + i\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}(x_A + iy_A + x_B + iy_B) = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

2) Notons respectivement (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C) les coordonnées des points A, B et C dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Les coordonnées du point G dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ sont $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$. Donc, l'affixe du point G est

$$z_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} + i\frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3}(x_A + iy_A + x_B + iy_B + x_C + iy_C) = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C).$$

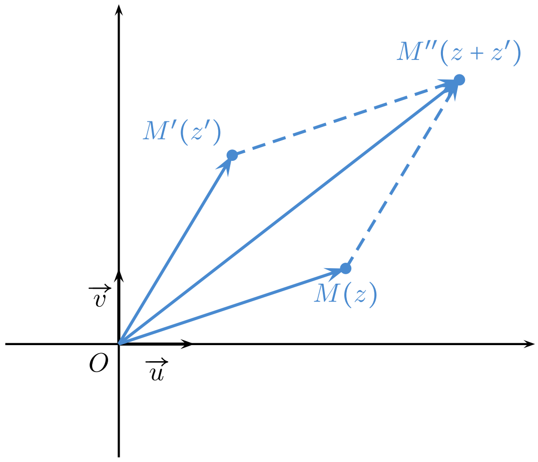
3) Notons respectivement (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées des points A et B dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Donc, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

4) a) et b) Notons respectivement (x, y) et (x', y') les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}'$ sont $(x + x', y + y')$ et les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{w}$ sont (kx, ky). Par suite,

$$z_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}'} = (x + x') + i(y + y') = (x + iy) + (x' + iy') = z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w}'} \text{ et } z_{k\overrightarrow{w}} = kx + iky = k(x + iy) = kz_{\overrightarrow{w}}.$$

Remarque. Le 4)a) a pour conséquence que si on note M, M' et M'' les points d'affixes respectives z, z' et $z + z'$, le point M'' est le point tel que le quadrilatère $OMM''M'$ soit un parallélogramme.



Exercice 6. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points $A(2,1)$, $B(-5,3)$ et $C(-2,0)$.
1) Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ADBC$ soit un parallélogramme.

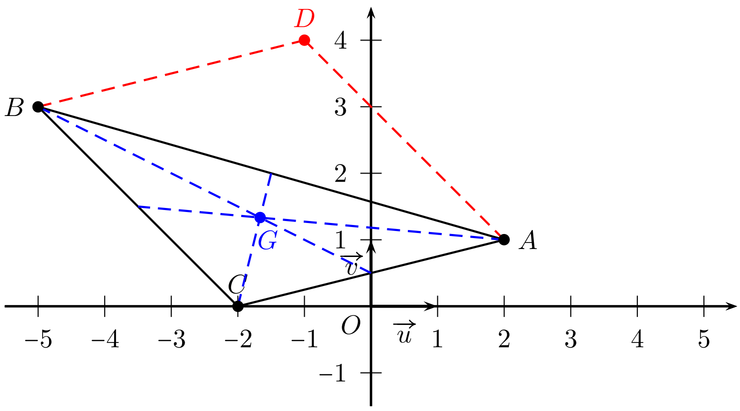
Solution. 1) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

$$z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(2 + i - 5 + 3i - 2) = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}i.$$

L'affixe de G est $-\frac{5}{3} + \frac{4}{3}i$ ou encore les coordonnées de G sont $\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

2) Soit D le point tel que le quadrilatère $ADBC$ soit un parallélogramme. On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ et donc $z_D - z_A = z_B - z_C$ puis $z_D = z_A + z_B - z_C = 2 + i - 5 + 3i + 2 = -1 + 4i$.

L'affixe du point D est $-1 + 4i$ ou encore le point D a pour coordonnées $(-1, 4)$.



Remarque. Les points d'affixe un nombre réel sont les points de l'axe des abscisses et les points du plan d'affixe un nombre imaginaire pur sont les points de l'axe des ordonnées.

Exercice 7. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout nombre complexe z, on pose $z' = (1 - i)z + 2 + i$.
Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que z' soit réel.

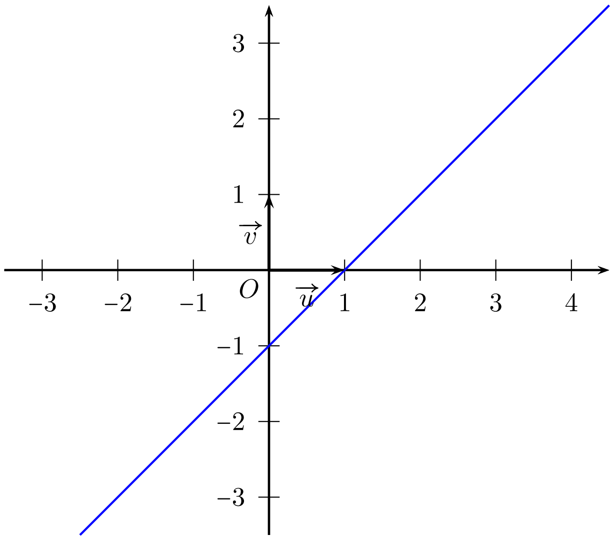
Solution. Soient x et y deux réels. Soit M le point du plan de coordonnées (x, y) puis soit $z = x + iy$ son affixe.

$$z' = (1 - i)z + 2 + i = (1 - i)(x + iy) + 2 + i = x + iy - ix + y + 2 + i = (x + y + 2) + i(-x + y + 1).$$

Puisque x et y sont des réels, $\text{Re}(z') = x + y + 2$ et $\text{Im}(z') = -x + y + 1$. Par suite,

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow -x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = x - 1$.



III. Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition du conjugué

Définition 5. Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$. Le conjugué du nombre z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par

$$\overline{z} = x - iy.$$

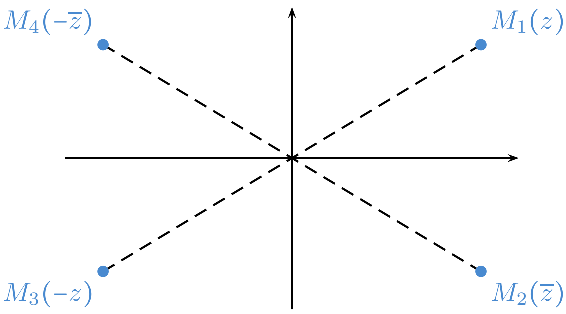
On peut réexprimer la définition précedente sans utiliser les lettres x et y :

$$\text{pour tout nombre complexe } z,\ \overline{z} = \text{Re}(z) - i\,\text{Im}(z).$$

Par exemple, $\overline{(3+2i)} = 3 - 2i$, $\overline{(-5)} = -5$ et $\overline{i} = -i$.

2) Représentation géométrique du conjugué et de l'opposé

On représente dans le plan complexe un point M_1 d'affixe z puis les points M_2, M_3 et M_4 d'affixes respectives $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.



Le point M_3 d'affixe $-z$ est le symétrique du point M_1 d'affixe z par rapport au point O alors que le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique du point M_1 d'affixe z par rapport à l'axe (Ox). On doit en particulier bien faire attention au fait que $\overline{z}$ n'est pas $-z$.

3) Propriétés de calcul du conjugué

Théorème 9. **1)** Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{(z+z')} = \overline{z} + \overline{z'}$.

2) Pour tout nombre complexe z et tout nombre réel k, $\overline{(kz)} = k\,\overline{z}$.

3) **a)** Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b) Pour tout nombre complexe non nul z, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

c) Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

d) Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

4) Pour tout nombre complexe z, $\overline{(\overline{z})} = z$.

On peut résumer les résultats précédents en disant que

« le conjugué fonctionne bien avec toutes les opérations ».

Par exemple, $\overline{\left(\dfrac{3-iz+(3-i)^2}{1+(1+i)z}\right)} = \dfrac{3+i\overline{z}+(3+i)^2}{1+(1-i)\overline{z}}$ (encore une fois, le conjugué de z n'est pas $-z$).

Démonstration. 1) Soient z et z' deux nombres complexes. Posons $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, x', y et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}\overline{(z+z')} &= \overline{(x+iy)+(x'+iy')} = \overline{(x+x')+i(y+y')} = (x+x')-i(y+y') = (x-iy)+(x'-iy') \\ &= \overline{z}+\overline{z'}.\end{aligned}$$

2) Soient z un nombre complexe et k un réel. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}\overline{(kz)} &= \overline{k(x+iy)} = \overline{kx+iky} = kx-iky = k(x-iy) \\ &= k\overline{z}.\end{aligned}$$

3) a) Soient z et z' deux nombres complexes. Posons $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ où x, x', y et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}\overline{(z\times z')} &= \overline{(x+iy)\times(x'+iy')} = \overline{(xx'-yy')+i(xy'+yx')} = (xx'-yy')-i(xy'-yx') \\ &= (x-iy)\times(x'-iy') = \overline{z}\times\overline{z'}.\end{aligned}$$

b) Soit z un nombre complexe non nul. D'après la propriété 1),

$$\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(z\times\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1,$$

et donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

c) Soit z un nombre complexe et z' un nombre complexe non nul. D'après la propriété 1) et la propriété 3)b),

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

4) Soit z un nombre complexe. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels. Alors x et $-y$ sont deux réels et

$$\overline{(\overline{z})} = \overline{(x-iy)} = x+iy = z.$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $(1-i)\overline{z}-2+i = 0$.
2) $(3+2i)z+(1-i)\overline{z} = 1$.

Solution. 1) Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned}(1-i)\overline{z}-2+i = 0 &\Leftrightarrow (1+i)z-2-i = 0 \text{ (en conjuguant les deux membres de l'équation)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2+i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{2-2i+i+1}{1^2+1^2} \Leftrightarrow z = \frac{3-i}{2}.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i\right\}$.

2) Soit z un nombre complexe. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}(3+2i)z+(1-i)\overline{z} &= (3+2i)(x+iy)+(1-i)(x-iy) = 3x+3iy+2ix-2y+x-iy-ix-y \\ &= (4x-3y)+i(x+2y).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(3+2i)z+(1-i)\overline{z} = 1 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x-3y=1\\ x+2y=0\end{array}\right. \text{ (par identification des parties réelles et imaginaires)} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-2y\\ 4(-2y)-3y=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{11}\\ x=\dfrac{2}{11}\end{array}\right. .\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est $\left\{\dfrac{2}{11}-\dfrac{1}{11}i\right\}$.

4) Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Théorème 10. **1)** Pour tout nombre complexe z, z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
2) Pour tout nombre complexe z, z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Démonstration. **1)** Soit z un nombre complexe.

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow \text{Re}(z) - i\text{Im}(z) = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) \Leftrightarrow 2i\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est réel.}$$

2) Soit z un nombre complexe.

$$\overline{z} = -z \Leftrightarrow \text{Re}(z) - i\text{Im}(z) = -\text{Re}(z) - i\text{Im}(z) \Leftrightarrow 2\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur.}$$

Théorème 11. Pour tout nombre complexe z,

$$z + \overline{z} = 2\text{Re}(z) \text{ et } z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$$

et donc aussi

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Démonstration. Soit z un nombre complexe.

$$z + \overline{z} = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z) + \text{Re}(z) - i\,\text{Im}(z) = 2\text{Re}(z) \text{ et } z - \overline{z} = \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z) - \text{Re}(z) + i\,\text{Im}(z) = 2i\,\text{Im}(z).$$

Remarque. Avec les formules du théorème 11, on retrouve les caractérisations du théorème 10 car par exemple

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z.$$

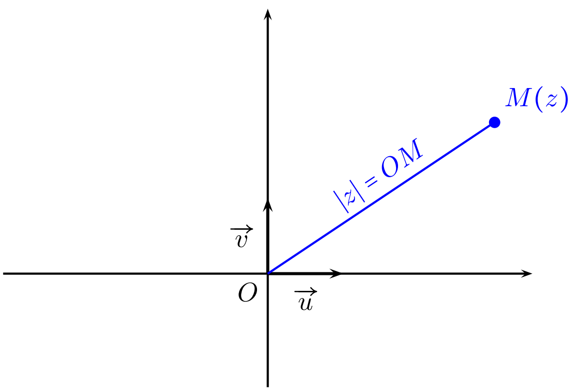
IV. Module d'un nombre complexe

1) Définition du module d'un nombre complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Définition 6. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z. Le module du nombre z est le nombre réel positif noté $|z|$ défini par

$$|z| = OM.$$



On peut donner deux autres écritures du module d'un nombre complexe.

Théorème 12. Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et aussi } |z| = \sqrt{z \times \overline{z}}.$$

Démonstration. Soient x et y deux réels puis $z = x + iy$. Soit M le point d'affixe z.
On sait que la distance OM est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$ et donc $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. D'autre part, d'après le théorème 5 de la page 4, $z \times \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ et on a donc aussi $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Exemple. $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Remarque 1. Le symbole « racine carrée » n'est autorisé que pour les réels positifs, ce qui est le cas du nombre $x^2+y^2 = z\times\overline{z}$, et le symbole « racine carrée » est interdit pour des nombres complexes qui ne sont pas des réels positifs. En effet, le symbole $\sqrt{2}$ par exemple désigne l'**unique** réel positif dont le carré est égal à 2. On note qu'il existe un autre réel dont le carré vaut 2 : le nombre $-\sqrt{2}$.
Mais pour le nombre $-2i$ par exemple, on a $(1-i)^2 = (-1+i)^2 = -2i$ et on ne peut pas parler de **la** racine carrée de $-2i$ car on ne sait pas choisir entre $-1+i$ et $1-i$. On ne peut donc pas écrire le nombre $-2i$ sous le symbole $\sqrt{}$.

Remarque 2. Revenons sur le calcul de l'inverse d'un nombre complexe non nul. Soit z un nombre complexe non nul. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels, l'un au moins de ces deux réels n'étant pas nul. On rappelle que l'inverse de z se calcule ainsi : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
Pour rendre réel le dénominateur de la fraction $\dfrac{1}{z}$, nous avons multiplié par le conjugué de z. Ce faisant, nous avons obtenu en dénominateur $z\times\overline{z} = |z|^2$. Le calcul précédent peut donc se réécrire

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\times\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Remarque 3. Si z est un nombre complexe qui est en particulier un nombre réel le module du réel z n'est autre que la valeur absolue du réel z.

Théorème 13. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan.

$$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Démonstration. L'égalité $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ est connue depuis longtemps.
D'autre part, $z_B - z_A = (x_B-x_A)+i(y_B-y_A)$ et donc $|z_B-z_A| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = AB$.

Exercice 9. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points $A(1,1)$, $B(-3,-1)$ et $C(-6,5)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

Solution.

1 ère solution. Les affixes des points A, B et C sont respectivement $z_A = 1+i$, $z_B = -3-i$ et $z_C = -6+5i$.

- $AB = |z_B - z_A| = |(-3-i)-(1+i)| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$.
- $CB = |z_B - z_C| = |(-3-i)-(-6+5i)| = |3-6i| = \sqrt{3^2+(-6)^2} = \sqrt{45}$.
- $AC = |z_A - z_C| = |(1+i)-(-6+5i)| = |7-4i| = \sqrt{7^2+(-4)^2} = \sqrt{65}$.

Par suite,

$$BA^2 + BC^2 = 20+45 = 65 = |z_A - z_C|^2 = AC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle ABC est rectangle en B.

2 ème solution. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont respectivement $(4,2)$ et $(-3,6)$ puis

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 4\times(-3)+2\times 6 = -12+12 = 0.$$

Par suite, $(BA)\perp(BC)$ et donc le triangle ABC est rectangle en B.

Théorème 14. **1)** Pour tout nombre complexe z, $|z| \geqslant 0$.
2) Pour tout nombre complexe z : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Démonstration. **1)** est immédiat.

2) $|0| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$ et donc si $z = 0$, alors $|z| = 0$. Réciproquement, soit z un nombre complexe tel que $|z| = 0$. Soit M le point du plan d'affixe z. On a $OM = 0$ puis $M = O$ et donc $z = 0$.

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 6 page 3, on a déjà démontré que si $|z| = 0$ alors $z = 0$, mais de manière plus compliquée (on avait montré que si x et y étaient deux réels tels que $x^2 + y^2 = 0$, alors $x = y = 0$.)

Remarque 2. Dans le théorème précédent, on a écrit $|z| \geqslant 0$. Ceci est une inégalité entre nombres réels et on a bien sûr le droit d'écrire des inégalités entre nombres réels. Par contre, on n'a pas le droit d'écrire des inégalités entre des nombres complexes qui ne sont pas des nombres réels.
Donnons une vague justification de cette interdiction. Si on se permet d'écrire des inégalités entre nombres complexes, dans quel ordre sont les nombres 0 et i ? Si i est positif, alors $i^2 = i \times i = -1$ est positif ce qui est impossible et si i est négatif, alors $-i$ est positif puis $(-i)^2 = -1$ est positif ce qui est également impossible. Finalement, on n'arrive pas à classer les nombres 0 et i.

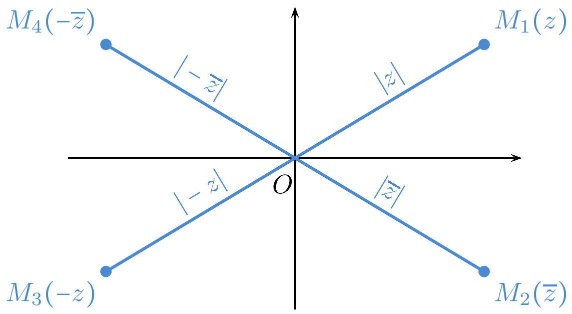
2) Propriétés algébriques du module d'un nombre complexe

Théorème 15. Pour tout nombre complexe z, $|\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = |z|$.

Démonstration. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Les quatre nombres complexes z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ s'écrivent sous la forme $\pm x \pm iy$. Mais alors

$$|\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}| = \sqrt{(\pm x)^2 + (\pm y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Les quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 d'affixes respectives z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ vérifient $OM_1 = 0M_2 = OM_3 = OM_4$.



Théorème 16. **1)** Pour tous nombres complexes z et z', $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
2) Pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
3) Pour tout complexe z et tout complexe non nul z', $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
4) Pour tout complexe z et tout entier naturel non nul n, $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration. **1)** Soient z et z' deux nombres complexes. D'après le théorème 9, page 9,

$$|z \times z'|^2 = (z \times z') \times \overline{(z \times z')} = (z \times \overline{z}) \times (z' \times \overline{z'}) = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2.$$

Puisque les nombres $|z \times z'|$ et $|z| \times |z'|$ sont des réels positifs et ont des carrés égaux, on en déduit que ces nombres sont égaux.

2) Soit z un nombre complexe non nul.

$$|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = \left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$$

et donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

3) Soient z un nombre complexe et z' un nombre complexe non nul. D'après 1) et 2)

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$

4) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $|z^n| = |z|^n$.

- Pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z^1|$ et donc la formule proposée est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $|z^n| = |z|^n$. D'après la propriété 1), on a alors

$$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Exercice 10. Calculer le module de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ et le module de $(1+i)^5$.

Solution.

$$\left|\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

et

$$|(1+i)^5| = |1+i|^5 = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 = 4\sqrt{2}.$$

Remarque. Il aurait été très maladroit de rendre d'abord réel le dénominateur de la fraction en écrivant $\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ ou aussi de développer la puissance 5-ème avant de calculer son module.

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z-1}{z+1}$ soit de module 1.

Solution. Soit z un nombre complexe distinct de -1. Soient M le point d'affixe z, A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1.

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z+1|} = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM\\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [AB]\\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient à l'axe } (Oy)\\ &\Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur.}\end{aligned}$$

L'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z-1}{z+1}$ soit de module 1 est l'ensemble des imaginaires purs.

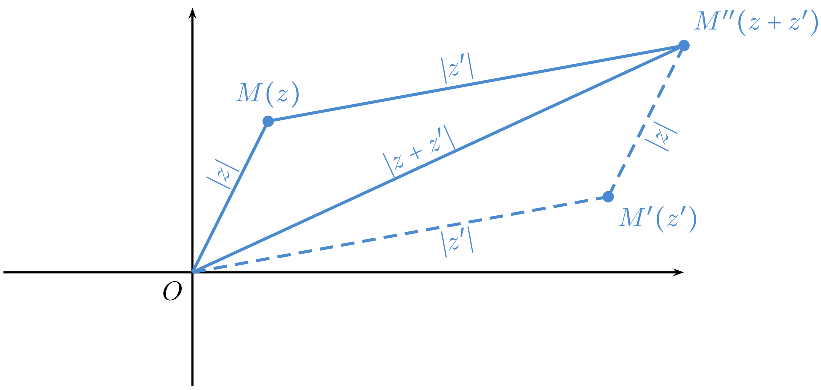
---

3) L'inégalité triangulaire

Théorème 17. Pour tous nombres complexes z et z', $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Démonstration. Soient z et z' deux nombres complexes. Soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ les vecteurs d'affixes respectives z et z'.

$$|z+z'| = \left\|\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{w}\right\| + \left\|\overrightarrow{w'}\right\| = |z| + |z'|.$$



On peut aussi donner une démonstration n'utilisant que les nombres complexes et n'utilisant pas des résultats antérieurs sur les vecteurs.

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z') \times \overline{(z+z')} = (z+z') \times (\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}\\ &= |z|^2 + (z\overline{z'}) + \overline{(z\overline{z'})} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2.\end{aligned}$$

Maintenant, si X et Y sont deux réels et $Z = X + iY$,

$$\mathrm{Re}(Z) = X \leqslant |X| = \sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{X^2+Y^2} = |Z|.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2\\ &\leqslant |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{z'}| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2.\end{aligned}$$

Puisque les deux nombres $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont des réels positifs et que la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que

$$|z+z'| = \sqrt{|z+z'|^2} \leqslant \sqrt{(|z|+|z'|)^2} = |z|+|z'|.$$

V. *Équations du second degré à coefficients réels*

1) Forme canonique d'un trinôme du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout nombre complexe z, on a

$$\begin{aligned}az^2+bz+c &= a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[z^2 + 2\times\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]\\ &= a\left[\left(z^2 + 2\times\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]\\ &= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \quad (*).\end{aligned}$$

Cette dernière écriture est la **forme canonique** du trinôme du second degré az^2+bz+c. La différence fondamentale entre l'expression az^2+bz+c et l'expression $a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est que dans la deuxième expression, la lettre z apparaît une fois et une seule. On comprend ainsi les opérations successives effectuées à partir de la variable z.

2) Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On note (E) l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue le nombre complexe z. On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit z un nombre complexe. D'après la formule $(*)$ du paragraphe précédent,

$$\begin{aligned}az^2+bz+c = 0 &\Leftrightarrow a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.\end{aligned}$$

1er cas. Supposons que $\Delta > 0$. Alors

$$\begin{aligned}az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \textbf{ ou } z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2ème cas. Supposons que $\Delta = 0$. Alors

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}.$$

Ainsi, si $\Delta=0$, l'équation (E) admet une solution réelle $z_1=-\dfrac{b}{2a}$. Cette solution est dite double car le nombre z_1 est « deux fois » solution de l'équation $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)=0$.

3ème cas. Supposons que $\Delta<0$. Alors $-\Delta>0$ puis

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{-\Delta i^2}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \textbf{ ou } z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Ainsi, si $\Delta<0$, l'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées (et donc distinctes) $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Théorème 18. Soient a, b et c trois réels tels que $a\neq 0$. Soit (E) l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue le nombre complexe z.

$$\text{On pose } \Delta=b^2-4ac.$$

- Si $\Delta>0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta=0$, l'équation (E) admet une solution réelle double

$$z_1=z_2=-\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta<0$, l'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-6z+13=0$.

Solution. Le discriminant Δ de l'équation (E) est :

$$\Delta=(-6)^2-4\times 13=36-52=-16<0.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1=\frac{-(-6)+i\sqrt{-(-16)}}{2}=\frac{-(-6)+i\sqrt{16}}{2}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$$

et $z_2=\overline{z_1}=3-2i$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ est $\{3+2i,3-2i\}$.

Remarque. Dans les trois cas ($\Delta<0$, $\Delta=0$ et $\Delta>0$), on a une écriture unique des solutions :

Théorème 18 bis. Soient a, b et c trois réels tels que $a\neq 0$. Soit (E) l'équation az^2+bz+c d'inconnue le nombre complexe z.

$$\text{On pose } \Delta=b^2-4ac,$$

et on note δ un nombre complexe tel que $\delta^2=\Delta$.

L'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Avec cet énoncé, la rédaction de la résolution change légèrement :

Exercice 12 bis. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Solution. Le discriminant Δ de l'équation (E) est :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-6) + 4i}{2} = 3 + 2i$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 3 - 2i$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ est $\{3 + 2i, 3 - 2i\}$.

Exercice 13. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$.

Solution. Soit θ un réel élément de $]0, \pi[$. Le discriminant Δ de l'équation (E) est :

$$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) < 0 \text{ (car } \theta \in]0, \pi[).$$

Puisque $\Delta = (2i\sin(\theta))^2$, l'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

et $z_2 = \overline{z_1} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ est $\{\cos(\theta) + i\sin(\theta), \cos(\theta) - i\sin(\theta)\}$.

VI. Argument d'un nombre complexe non nul. Forme trigonométrique

Le plan est maintenant rapporté à un repère orthonormé **direct** $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

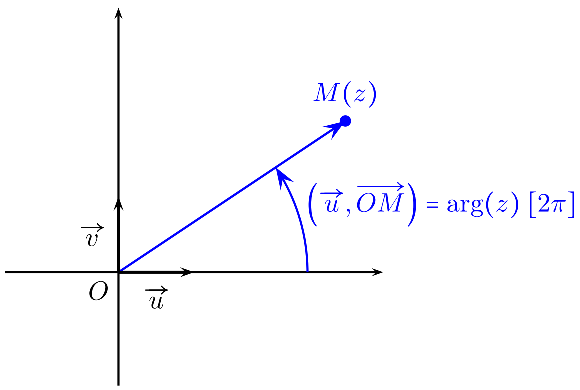
1) Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 7. Soit z un nombre complexe **non nul**.
Un **argument** de z est une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.

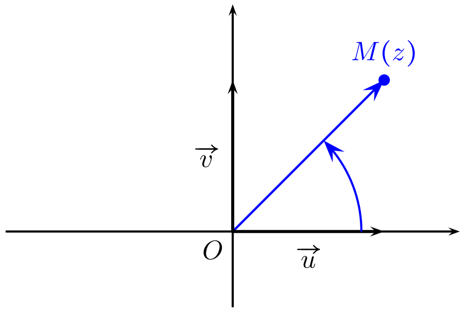
Remarque. Si $z = 0$, alors $M = O$ puis $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. On sait que l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \vec{0}\right)$ n'existe pas. C'est pour cette raison que z n'est pas nul dans la définition 7.

0 n'a pas d'argument.

Notation. Un argument de z se note $\arg(z)$.



Exemple. Soit $z = 1 + i$. z n'est pas nul et z est l'affixe du point $M(1, 1)$. Graphiquement, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et donc un argument de $1 + i$ est $\frac{\pi}{4}$.



Un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$ car si M est le point d'affixe $1+i$ alors
$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Remarque. On sait que les mesures d'un angle orienté sont les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ où θ est l'une des mesures de l'angle orienté et k est un entier relatif. Donc, les arguments d'un nombre complexe non nul z sont les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ où θ est l'un des arguments de z et k est un entier relatif.

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

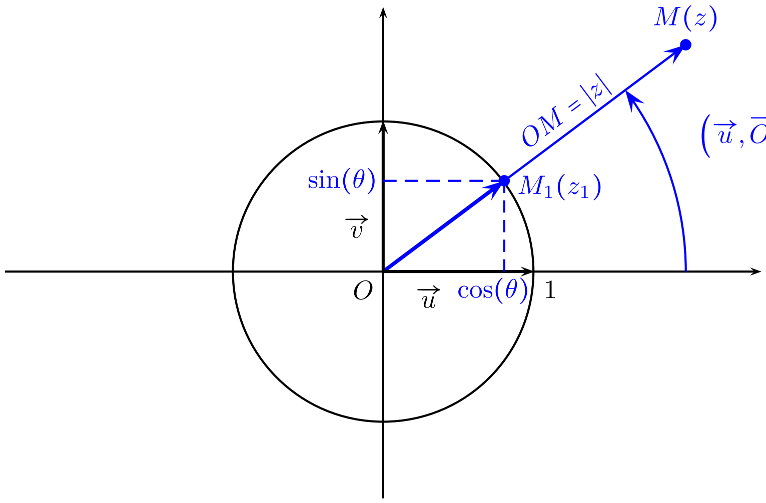
Soient z un nombre complexe non nul puis M le point d'affixe z. Posons $r = |z|$ et notons θ un argument de z. r n'est pas nul et on peut donc poser $z_1 = \dfrac{z}{r}$. Le nombre z_1 est un nombre complexe de module 1 car

$$\begin{aligned}|z_1| &= \left|\frac{z}{r}\right| = \left|\frac{1}{|z|} \times z\right| = \frac{1}{|z|} \times |z| \text{ (car } \frac{1}{|z|} \text{ est un réel positif)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Soit M_1 le point d'affixe z_1. Puisque $z_1 = \dfrac{z}{r}$, on a encore $z = rz_1$ ou aussi $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{OM_1}$. Puisque le réel r est strictement positif, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont colinéaires et de même sens. On en déduit que

$$\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \theta\ [2\pi].$$

Maintenant, le point M_1 est un point du cercle trigonométrique et de plus, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \theta\ [2\pi]$. Les coordonnées de M_1 sont donc $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ ou encore $z_1 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ ou enfin $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.



Théorème 19. Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

où r est un réel strictement positif et θ un réel.

Vérifions maintenant que, en un certain sens, cette écriture est unique.

Théorème 20. Soient r et r' deux réels strictement positifs et soient θ et θ' deux réels.

$$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \Leftrightarrow r' = r \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta' = \theta + 2k\pi.$$

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments égaux modulo 2π.

Démonstration. Soient r et r' deux réels strictement positifs et soient θ et θ' deux réels.

• Supposons que $r' = r$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$. Alors $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$ puis $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$.

• Réciproquement, supposons que $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$. Tout d'abord, puisque r est un réel strictement positif

$$|r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))| = r\,|\cos(\theta)+i\sin(\theta)| = r\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = r.$$

et donc aussi $|r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))| = r'$. Puisque les nombres $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ et $r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$ sont égaux, ils ont même module et donc $r' = r$. En simplifiant par le réel non nul r, il reste l'égalité

$$\cos(\theta)+i\sin(\theta) = \cos(\theta')+i\sin(\theta').$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$. On sait que ces deux égalités impliquent qu'il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.

Ainsi, l'écriture d'un nombre complexe non nul z sous la forme $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$, où r est un réel strictement positif et θ est un réel, est unique en ce sens que si $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$ (où $r'>0$), alors $r = r'$ et $\cos(\theta)+i\sin(\theta) = \cos(\theta')+i\sin(\theta')$. Ceci motive la définition suivante :

Définition 8. Soit z un nombre complexe non nul.
L'écriture de z sous la forme $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel s'appelle **la forme trigonométrique** du nombre complexe non nul z.

Rappelons alors que :

Théorème 21. Soit z un nombre complexe non nul. Soient r un réel strictement positif et soit θ un réel.

$$z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \Leftrightarrow r = |z| \text{ et } \theta \text{ est un argument de } z.$$

Méthode pratique. On veut obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul z écrit sous forme algébrique : $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

1) On calcule le module de z : $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

2) On met le module de z en facteur : $z = |z|\left(\dfrac{x}{|z|}+i\dfrac{y}{|z|}\right) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

3) Le nombre $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est de module 1 et on cherche $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos(\theta)$ et $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\theta)$. On a ainsi obtenu

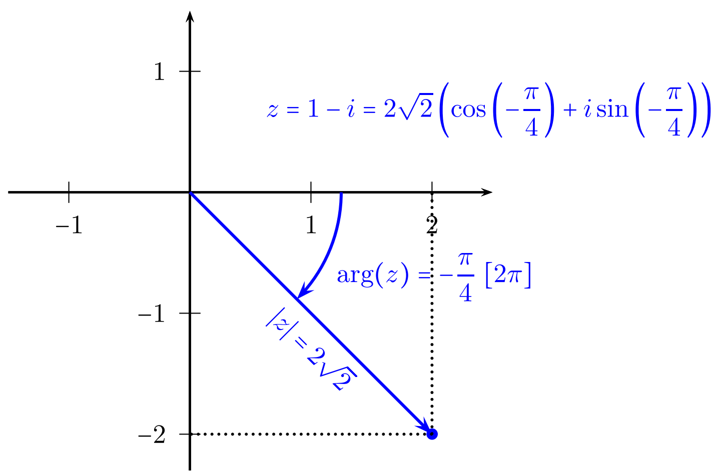
$$z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) \text{ où } r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0.$$

Exercice 14. Déterminer la forme trigonométrique de $2-2i$.

Solution. $|2-2i| = 2|1-i| = 2\sqrt{1^2+(-1)^2} = 2\sqrt{2}$ puis

$$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

La forme trigonométrique de $2-2i$ est $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, le module de $2-2i$ est $2\sqrt{2}$ et un argument de $2-2i$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.



3) Écriture sous forme exponentielle

Pour tous réel θ, posons $f(\theta)=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$. Pour tous réels θ et θ',

$$\begin{aligned}
f(\theta)\times f(\theta') &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))\times(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))\\
&= (\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta'))+i(\sin(\theta)\cos(\theta')+\cos(\theta)\sin(\theta'))\\
&= \cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\\
&= f(\theta+\theta').
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $\theta\mapsto\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ vérifie la même règle de calcul que la fonction exponentielle et on va donc adopter une notation analogue :

Définition 9. Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

Remarque. Cette notation ne peut pas être comprise en Terminale. Il faut attendre deux années d'étude après le bac pour vraiment la comprendre.

Exemple. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=e^{i\pi/6}$.

Il faut connaître la forme exponentielle de quelques nombres complexes de module 1 particuliers :

$$1=e^0,\quad i=e^{i\pi/2},\quad -1=e^{i\pi}\quad -i=e^{-i\pi/2}.$$

En effet, $i=0+1\times i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{i\pi/2}$ et $-1=-1+0\times i=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=e^{i\pi}$.

Théorème 22.
1) Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right|=1$ et $\arg\left(e^{i\theta}\right)=\theta\ [2\pi]$.
2) Pour tout nombre complexe z, $|z|=1\Leftrightarrow$ il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=e^{i\theta}$.

Démonstration. 1) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. $\left|e^{i\theta}\right|=|\cos(\theta)+i\sin(\theta)|=\sqrt{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}=1$.
D'autre part, $e^{i\theta}$ est l'affixe du point $M(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Par suite, $\arg\left(e^{i\theta}\right)=\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}\right)=\theta\ [2\pi]$.

2) Le 1) montre que pour tout réel θ, $e^{i\theta}$ est de module 1.
Réciproquement, soit z un nombre complexe de module 1. z est donc l'affixe d'un point M du cercle trigonométrique. On sait que les coordonnées de M sont de la forme $(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Mais alors $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)=e^{i\theta}$.

On retiendra que

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

4) Propriétés de calcul des arguments, des formes trigonométriques

On a déjà donné les propriétés de calcul des modules (voir théorèmes 15 et 16 page 12).
On donne maintenant les propriétés de calcul des arguments, des écritures exponentielles et donc plus généralement des formes trigonométriques. On notera que ces formules montrent en particulier que

La forme algébrique est bien adaptée à l'addition et pas à la multiplication.
La forme trigonométrique est bien adaptée à la multiplication et pas à l'addition.

Théorème 23.
1) a) Pour tous réels θ et θ', $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$.
b) Pour tout réel θ, $e^{i\theta}\neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.
c) Pour tous réels θ et θ', $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.
d) Pour tout réel θ et tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$.

2) a) Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.
b) Pour tout nombre complexe non nul z, $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg(z)\ [2\pi]$.
c) Pour tous nombres complexes non nuls z et z', $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$.
d) Pour tout nombre complexe non nul z et tout entier relatif n, $\arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration. 1) a) Le calcul effectué en préliminaire de la définiton 9 au paragraphe précédent montre que pour tous réels θ et θ', $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

b) Soit θ un réel. D'après a), $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1$. En particuiler, $e^{i\theta} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

c) Soient θ et θ' deux réels. D'après b), $e^{i\theta'}$ n'est pas nul puis d'après a) et b),

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times \frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

d) Soit θ un réel. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

- $e^{0i\theta} = e^0 = 1 = \left(e^{i\theta}\right)^0$ et donc la formule à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. Alors

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n \times e^{i\theta} = e^{in\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Soit maintenant n un entier relatif strictement négatif. Posons $m = -n$. m est un entier naturel et donc

$$e^{in\theta} = e^{-im\theta} = \frac{1}{e^{im\theta}} = \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^m} = \left(e^{i\theta}\right)^{-m} = \left(e^{i\theta}\right)^n.$$

La formule est donc vraie également pour des exposants n strictement négatifs. On a ainsi montré que pour tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Enfin, les formules 2)a), b) c) et d) ne sont qu'une reformulation des résultats de 1).

Remarque. La formule $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ est connue sous le nom de formule de MOIVRE.

Dans le théorème suivant, on analyse le conjugué et l'opposé d'un nombre complexe de module 1 et plus généralement l'argument du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe non nul.

Théorème 24.

1) Pour tout réel θ, $\overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

2) Pour tout nombre complexe non nul z, $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg\left(-z\right) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.

Démonstration. 1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\overline{\left(e^{i\theta}\right)} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

et

$$-e^{i\theta} = e^{i\pi} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}.$$

Enfin, 2) est une reformulation des résultats de 1).

Exercice 15. Déterminer la forme trigonométrique de $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}$.

Solution. $|\sqrt{3}-i| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ puis

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\pi/6}.$$

D'autre part, $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} = \frac{2e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}.$$

Exercice 16. Calculer $(1+i)^{16}$.

Solution. $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(1+i)^{16} &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{16} = \left(\sqrt{2}\right)^{16}\left(e^{i\pi/4}\right)^{16} = 2^8 e^{i\frac{\pi}{4}\times 16}\\ &= 256e^{4i\pi} = 256(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) = 256.\end{aligned}$$

Donc, $(1+i)^{16} = 256$.

Remarque. Dans les deux exercices précédents, il y avait un quotient et un exposant qui sont deux notions liées à la multiplication des nombres complexes. Puisque la forme trigonométrique est bien adaptée à la multiplication contrairement à la forme algébrique, on a effectué les calculs sous forme trigonométrique et pas sous forme algébrique.

5) Application à la trigonométrie

Les formules sur l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur permettent de retrouver les différentes formules de trigonométrie (ce qui est bien normal car les formules sur l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur ont été établies à partir des différentes formules de trigonométrie).

Retrouvons par exemple les formules donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Soit x un réel.

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{2ix} = \left(e^{ix}\right)^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on retrouve

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \text{ et } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

ces deux formules ayant été établies en classe de première S.

Exercice 17. Exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Solution. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) &= e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3\\ &= (\cos(x))^3 + 3(\cos(x))^2(i\sin(x)) + 3(\cos(x))(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3\\ &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \text{ et } \sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x.$$

Remarque. Dans le calcul précédent, on a eu besoin de l'égalité $i^3 = -i$. Il faut avoir conscience des puissances successives du nombre i :

$$i^0 = 1,\quad ,i^1 = i,\quad ,i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1,\quad ,i^5 = i,\quad ,i^6 = -1,\quad i^7 = -i,\quad i^8 = 1\ \ldots$$

6) Calculs de longueurs et d'angles

Théorème 25. Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
1) $AB = |z_B - z_A|$.
2) Si de plus $A \neq B$, $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

Démonstration. Le 1) est un rappel (voir théorème 13 page 12). Pour le 2), on considère le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors

$$z_M = z_M - 0 = z_{\overrightarrow{OM}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A,$$

puis

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z_M) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi].$$

Théorème 26. **1)** Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d tels que $A \neq B$.

$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{CD}{AB}.$$

2) Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

Remarque. Dans $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$, les lettres a, b c et d apparaissent dans l'ordre d, c, b et a qui est l'ordre inverse de l'ordre dans lequel ces lettres apparaissent dans l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

Démonstration. **1)** $\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{|d-c|}{|b-a|} = \frac{CD}{AB}$.

2) D'après la relation de CHASLES sur les angles orientés,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right)\\ &= \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)\ [2\pi].\end{aligned}$$

Exercice 18. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points $A(1,1)$, $B(-1,2)$ et $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Solution. Notons a, b et c les affixes respectives des points A, B et C.

1 ère solution. Calculons $\frac{c-a}{b-a}$.

$$\begin{aligned}\frac{c-a}{b-a} &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)\right) - (1+i)}{(-1+2i) - (1+i)} = \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)}{-2+i}\\ &= \frac{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}\\ &= \frac{2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(-1 + 2\sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{\frac{5}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}.\end{aligned}$$

Par suite, $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \left|e^{i\pi/3}\right| = 1$ et donc $AC = AB$. Ceci montre que le triangle ABC est isocèle en A.

D'autre part, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(e^{i\pi/3}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. En particulier, $\widehat{BAC} = 60°$.

En résumé, le triangle ABC est isocèle en A et $\widehat{BAC} = 60°$. On en déduit que le triangle ABC est équilatéral.

2 ème solution. Calculons les trois distances AB, AC et BC.

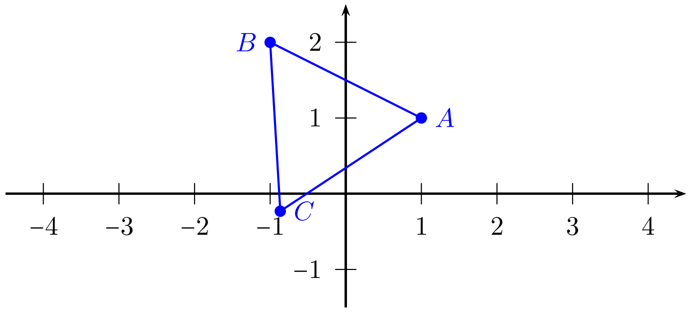
$AB = |b-a| = |(-1+2i) - (1+i)| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}AC = |c-a| &= \left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)\right) - (1+i)\right| = \left|\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)\right|\\ &= \sqrt{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

et enfin

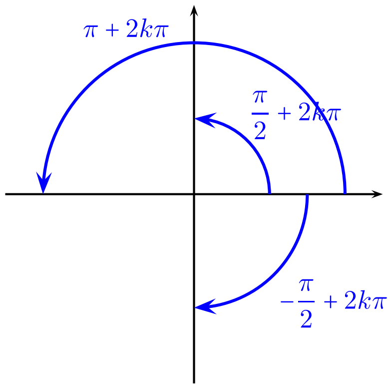
$$BC = |c-b| = \left|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)\right)-(-1+2i)\right| = \left|\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)\right|$$
$$= \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\sqrt{3}+3} = \sqrt{5}.$$

Ainsi, $AB = AC = BC = \sqrt{5}$ et donc le triangle ABC est équilatéral.



7) Caractérisation des réels non nuls et des imaginaires purs non nuls

Le théorème suivant est évident géométriquement et ne nécessite pas de démonstration. Il s'agit juste pour nous d'énoncer explicitement un résultat utile dans la pratique.



Théorème 27. Soit z un nombre complexe non nul.

1) a) z est un réel strictement positif $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = 2k\pi$.
b) z est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = \pi + 2k\pi$.
c) z est un réel non nul $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = k\pi$.

2) a) z est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
b) z est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
c) z est un un imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Exercice 18. Pour tout nombre complexe $z \neq 1+i$, on pose
$$Z = \frac{z-2+i}{z-1-i}.$$

1) (résolution algébrique)

a) On pose $z = x+iy$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est réel.
c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

2) (résolution géométrique)

a) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.
b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est réel.
c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

Solution. **1) a)** Soit z un nombre complexe différent de $1+i$. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x,y) \neq (1,1)$.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{x+iy-2+i}{x+iy-1-i} = \frac{(x-2)+i(y+1)}{(x-1)+i(y-1)} = \frac{((x-2)+i(y+1))((x-1)-i(y-1)}{((x-1)+i(y-1))((x-1)-i(y-1))} \\
&= \frac{(x-2)(x-1)+(y+1)(y-1)+i(-(x-2)(y-1)+(x-1)(y+1))}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2-2x-x+2+y^2-1+i(-xy+x+2y-2+xy+x-y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2-3x+1+i(2x+y-3)}{(x-1)^2+(y-1)^2}.
\end{aligned}$$

Donc, $\text{Re}(Z) = \dfrac{x^2+y^2-3x+1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ et $\text{Im}(Z) = \dfrac{2x+y-3}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

b) Soit z un nombre complexe différent de $1+i$. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels tels que $(x,y) \neq (1,1)$. Soit M le point d'affixe z.

$$\begin{aligned}
Z \text{ est réel} &\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+y-3}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-3 = 0 \text{ et } (x-1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow 2x+y-3 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,1).
\end{aligned}$$

Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x+y-3=0$. Le point A de coordonnées $(1,1)$ appartient à la droite $(\mathscr{D})$ car $2x_A+y_A-3 = 2+1-3 = 0$. Donc, l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est réel est la droite $(\mathscr{D})$ privée du point A.

c) De même,

$$\begin{aligned}
Z \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-3x+1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-3x+1 = 0 \text{ et } (x-1)^2+(y-1)^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4} \text{ et } (x,y) \neq (1,1).
\end{aligned}$$

Soit $(\mathscr{C})$ le cercle d'équation $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Le point A de coordonnées $(1,1)$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ car $\left(x_A-\dfrac{3}{2}\right)^2+y_A^2 = \dfrac{1}{4}+1 = \dfrac{5}{4}$. Donc, l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur est le cercle $(\mathscr{C})$ privé du point A.

2) a) Soit z un nombre complexe différent de $1+i$ puis M le point d'affixe z.
Soient A et B les points de coordonnées respectives $(1,1)$ et $(2,-1)$. Alors $z_A = 1+i$ et $z_B = 2-i$ puis,

$$Z = \frac{z-(2-i)}{z-(1+i)} = \frac{z-z_B}{z-z_A}.$$

Par suite, $|Z| = \left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right| = \dfrac{BM}{AM}$. Si de plus, $z \neq 2-i$, alors $Z \neq 0$ puis $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)$ $[2\pi]$.

b) Soit z un nombre complexe différent de $1+i$ puis M le point d'affixe z (donc $M \neq A$).

$$\begin{aligned}
Z \text{ est réel} &\Leftrightarrow Z = 0 \text{ ou } (Z \neq 0 \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg(Z) = k\pi) \\
&\Leftrightarrow z = z_B \text{ ou } (z \neq z_B \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = k\pi) \\
&\Leftrightarrow M = B \text{ ou } (M \neq B \text{ et les points } A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (AB) \text{ privée du point } A
\end{aligned}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est réel est la droite (AB) privée du point A.

c) Soit z un nombre complexe différent de $1+i$ puis M le point d'affixe z (donc $M \neq A$).

$$\begin{aligned}
Z \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow Z = 0 \text{ ou } (Z \neq 0 \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg(Z) = \frac{\pi}{2}+k\pi) \\
&\Leftrightarrow z = z_B \text{ ou } (z \neq z_B \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}+k\pi) \\
&\Leftrightarrow M = B \text{ ou } (M \neq B \text{ et le triangle } AMB \text{ est rectangle en } M) \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB] \text{ privé du point } A
\end{aligned}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est réel est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.