Chapitre 21. Matrices
(enseignement de spécialité)

I. *Définition des matrices*

1) Matrices carrées

a) Définitions et notations.

Définition 1. Soit n un entier naturel non nul.
Une **matrice carrée de format** n est un tableau carré de nombres réels à n lignes et n colonnes.

Vocabulaire. Au lieu de matrice carrée de format n, on peut aussi dire matrice carrée **d'ordre** n ou matrice carrée **de dimension** n ou matrice carrée **de taille** n. ❑

Notations. Ce tableau de nombres est en général écrit entre parenthèses. Par exemple, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de format 2. Mais, il arrive que les parenthèses soient remplacées par des crochets : $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
Cette matrice contient 4 coefficients. Le coefficient situé ligne 1, colonne 1, est égal à -2. Le coefficient situé ligne 1, colonne 2, est égal à 0. Le coefficient situé ligne 2, colonne 1, est égal à 1 et le coefficient situé ligne 2, colonne 2, est égal à 3. On peut noter $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ et $a_{2,2}$ ces 4 coefficients, le premier numéro écrit étant le numéro de ligne et le deuxième étant le numéro de colonne.
On a donc $a_{1,1} = -2$, $a_{1,2} = 0$, $a_{2,1} = 1$ et $a_{2,2} = 3$. ❑

De manière générale, une matrice carrée de format n a l'allure suivante :

$$\begin{array}{rcl}
 & j\text{-ème colonne} & \\
 & \downarrow & \\
A = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,j} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

A la ligne 1 et colonne 1, on a placé le nombre réel $a_{1,1}$, à la ligne 1 et colonne 2, on a placé le nombre réel $a_{1,2}$, et plus généralement, pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a placé à la ligne i, colonne j le nombre réel $a_{i,j}$. Le premier numéro écrit est le numéro de ligne et le deuxième numéro écrit est le numéro de colonne. ❑

Vocabulaire. Les coefficients situés aux ligne 1, colonne 1 et ligne 2, colonne 2 et . . . et ligne n, colonne n, constituent la **diagonale principale** de la matrice.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La diagonale principale d'une matrice carrée démarre en haut à gauche et finit en bas à droite. Les coefficients situés sur cette diagonale s'appellent les **coefficients diagonaux** de la matrice et les coefficients non situés sur cette diagonale s'appellent les **coefficients non diagonaux** de la matrice.

b) Matrices carrées particulières.

• La matrice carrée de format n dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée la **matrice nulle** de format n. Elle se note 0_n. Ainsi, $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• La matrice carrée de format n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les coefficients non diagonaux sont égaux à 0, est appelée la **matrice identité** ou aussi **matrice unité** de format n.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Elle se note I_n. Ainsi, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Une matrice carrée de format n est **diagonale** si et seulement si ses coefficients non diagonaux sont égaux à 0. Par exemple, les matrices 0_n et I_n sont des matrices diagonales. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice diagonale.

2) Matrices colonnes. Matrices lignes

Définition 2. Soit n un entier naturel non nul.
Une matrice colonne (ou un vecteur colonne) de format n est un tableau de nombres réels à n lignes et 1 colonne.
Une **matrice ligne** (ou un vecteur ligne) de format n est un tableau de nombres réels à 1 ligne et n colonnes.

Une matrice colonne a donc l'allure suivante :

$$C = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2, ..., u_n sont des nombres réels et une matrice ligne a l'allure suivante :

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_j & \dots & u_n \end{pmatrix}.$$

Par la suite, nous utiliserons beaucoup les vecteurs colonnes et très peu les vecteurs lignes.

II. Opérations sur les matrices

1) Addition des matrices et multiplication des matrices par un nombre réel

a) Définitions de l'addition et de la multiplication par un réel

On peut additionner deux matrices carrées de même format entre elles :

Définition 3 (addition de deux matrices carrées de même format).
Soit n un entier naturel non nul.
Soient A et B deux matrices carrées de format n. Pour chaque entier i et chaque entier j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ (respectivement $b_{i,j}$) le coefficient de la matrice A (respectivement B) situé ligne i, colonne j.
La matrice $A + B$ est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j, où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, est $a_{i,j} + b_{i,j}$.

Donc,

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,j} & \dots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,j} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,j}+b_{1,j} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & \dots & a_{i,j}+b_{i,j} & \dots & a_{i,n}+b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,j}+b_{n,j} & \dots & a_{n,n}+b_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi additionner deux matrices colonnes de même format entre elles :

Définition 4 (addition de deux matrices colonnes de même format).
Soit n un entier naturel non nul.
Soient U et V deux matrices colonnes de format n. Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note u_i (respectivement v_i) le coefficient de la matrice U (respectivement V) situé ligne i.
La matrice $U + V$ est la matrice colonne de format n dont le coefficient ligne i, où $1 \leqslant i \leqslant n$, est $u_i + v_i$.

Donc,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_i + v_i \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

On peut multiplier une matrice carrée par un réel :

Définition 5 (multiplication d'une matrice carrée par un réel).
Soit n un entier naturel non nul.
Soit A une matrice carrée de format n et soit λ un réel.
Pour chaque entier i et chaque entier j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la matrice A situé ligne i, colonne j.
La matrice λA est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j, où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, est $\lambda a_{i,j}$.

Donc,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times a_{1,1} & \dots & \lambda \times a_{1,j} & \dots & \lambda \times a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \times a_{i,1} & \dots & \lambda \times a_{i,j} & \dots & \lambda \times a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \times a_{n,1} & \dots & \lambda \times a_{n,j} & \dots & \lambda \times a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On peut enfin multiplier une matrice colonne par un réel :

Définition 6 (multiplication d'une matrice colonne par un réel).
Soit n un entier naturel non nul.
Soit U une matrice colonne de format n et soit λ un réel.
Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note u_i le coefficient de la matrice U situé ligne i.
La matrice λU est la matrice colonne de format n dont le coefficient ligne i, où $1 \leqslant i \leqslant n$, est λu_i.

Donc,

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times u_1 \\ \vdots \\ \lambda \times u_i \\ \vdots \\ \lambda \times u_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soient $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors,

$$-U + 4V = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) Propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel

En raisonnant sur chaque coefficient, on a immédiatement :

Théorème 1.
Soit n un entier naturel non nul.
1) Pour toutes matrices carrées A et B de format n, $A + B = B + A$.
2) Pour toutes matrices carrées A, B et C de format n, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3) Pour toute matrice carrée A de format n, $A + 0_n = A$.

Vocabulaire. La propriété 1) peut se réénoncer en disant que l'addition des matrices carrées est **commutative**.
La propriété 2) peut se réénoncer en disant que l'addition des matrices carrées est **associative**.
La propriété 3) peut se réénoncer en disant que la matrice nulle est **élément neutre** pour l'addition des matrices

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

carrées. ❑

Commentaire. La propriété 2), à savoir l'associativité de l'addition des matrices carrées de même format, nous permet de donner un sens à l'expression $A+B+C$ où A, B et C sont trois matrices carrées de même format : $A+B+C$ est égal à $(A+B)+C$ ou aussi à $A+(B+C)$. ❑

Dans le théorème suivant, on note plus simplement $-A$ la matrice $(-1)A$ c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les opposés des coefficients de A.

Théorème 2.
Soit n un entier naturel non nul.
Pour toute matrice carrée A de format n, $A+(-A)=0_n$.

Vocabulaire. La matrice $-A$ est la **matrice opposée** de la matrice A. ❑

Notation. Plus généralement, si A et B sont deux matrices carrées de format n, on note plus simplement $A-B$ la somme de A et de $-B$. $A-B$ est alors la différence des matrices carrées A et B. ❑

La multiplication des matrices carrées par un réel obéit quant à elle aux règles de calcul suivantes :

Théorème 3.
Soit n un entier naturel non nul.
1) Pour toute matrice carrée A de format n et tous réels λ et μ, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.
2) Pour toutes matrices carrées A et B de format n et tout réel λ, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

L'addition des matrices colonnes de même format et la multiplication des colonnes par un réel obéissent aux mêmes règles de calcul.

Théorème 4.
Soit n un entier naturel non nul.
1) a) Pour toutes matrices colonnes U et V de format n, $U+V=V+U$.
b) Pour toutes matrices colonnes U, V et W de format n, $U+(V+W)=(U+V)+W$.
c) Pour toute matrice colonne U de format n, $U+0=U$.
d) Pour toute matrice colonne U de format n, $U+(-U)=0$
2) a) Pour toute matrice colonne U de format n et tous réels λ et μ, $(\lambda+\mu)U=\lambda U+\mu U$.
b) Pour toutes matrices colonnes U et V et tout réel λ, $\lambda(U+V)=\lambda U+\lambda V$.

2) Multiplication des matrices

a) Multiplication d'un vecteur ligne de format n par un vecteur colonne de format n

Définition 7 (multiplication d'un vecteur ligne par un vecteur colonne de même format).
Soit n un entier naturel non nul.
Soit L un vecteur ligne de format n et soit C un vecteur colonne de format n.
Pour chaque entier i tel que $1\leqslant i\leqslant n$, on note a_i le coefficient du vecteur ligne L situé colonne i.
Pour chaque entier i tel que $1\leqslant i\leqslant n$, on note b_i le coefficient du vecteur colonne C situé ligne i.
Le produit du vecteur ligne L par le vecteur colonne C est **le réel**
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}=a_1\times b_1+a_2\times b_2+\ldots+a_i\times b_i+\ldots+a_n\times b_n.$$

Exemple. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}=3\times 0+(-1)\times 2+5\times(-4)=-22.$

b) Multiplication d'une matrice carrée de format n par un vecteur colonne de format n

Définition 8 (multiplication d'une matrice carrée par un vecteur colonne de même format).
Soit n un entier naturel non nul.
Soit A une matrice carrée de format n et soit X un vecteur colonne de format n.
Pour chaque entier i et chaque entier j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ le coefficient de la matrice A situé ligne i, colonne j.
Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on note x_i le coefficient du vecteur colonne X situé ligne i.
Le produit $A \times X$ est le vecteur colonne de format n dont le coefficient ligne i, où $1 \leqslant i \leqslant n$, est le produit de la ligne i de A par la colonne X.
Pour chaque entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, le coefficient ligne i de $A \times X$ est donc

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n.$$

Exemple. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$A \times X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times (-1) + 3 \times 2 \\ 4 \times (-1) + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Multiplication de deux matrices carrées de format n

Définition 9 (multiplication de deux matrices carrées de même format).
Soit n un entier naturel non nul.
Soient A et B deux matrices carrées de format n.
Pour chaque entier i et chaque entier j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$ (respectivement $b_{i,j}$) le coefficient de la matrice A (respectivement B) situé ligne i, colonne j.
Le produit $A \times B$ est la matrice carrée de format n dont le coefficient ligne i, colonne j, où $1 \leqslant i \leqslant n$, est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B.
Pour chaque entier i et chaque entier j tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, le coefficient ligne i, colonne j, de $A \times B$ est donc

$$a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

Exemple 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 4 + 2 \times 2 & 0 \times (-1) + 2 \times 1 \\ (-1) \times 4 + 1 \times 2 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut améliorer la visualisation du produit $A \times B$ avec la présentation suivante. Par exemple, le coefficient ligne 1, colonne 2 de la matrice $A \times B$ est le produit de la ligne 1 de la matrice A par la colonne 2 de la matrice B :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \times 4 + 2 \times 2 & 0 \times (-1) + 2 \times 1 \\ (-1) \times 4 + 1 \times 2 & (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 \\ 0 \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi, $A \times B = 0_2$ et $B \times A = A \neq 0_2$. Donc $A \times B \neq B \times A$. C'est le plus gros problème que l'on rencontre avec la multiplication des matrices carrées : **la multiplication des matrices carrées n'est pas commutative.** Nous reviendrons sur ce fait dans le paragraphe e).

Notation. Comme pour les produits de nombres, on se permettra par la suite de ne plus écrire le symbole $\times$. La plupart du temps, on écrira AB au lieu de $A \times B$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

d) Propriétés de la multiplication des matrices

Nous admettrons en partie le théorème suivant qui fournit quelques propriétés de multiplication des matrices carrées :

Théorème 5.
Soit n un entier naturel non nul.
1) Pour toutes matrices carrées A, B et C de format n, $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
2) a) Pour toute matrice carrée A de format n, $A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$.
b) Pour toute matrice carrée A de format n, $A \times I_n = I_n \times A = A$.
c) Pour toute matrice colonne X de format n, $I_n \times X = X$.
3) Pour toutes matrices carrées A, B et C de format n, $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$ et $(B+C) \times A = B \times A + C \times A$.

Démonstration. Soit n un entier naturel non nul.

• Nous admettrons la propriété 1) car les sommes qu'il est nécessaire d'écrire sont délicates à manipuler en terminale.

• Soit A une matrice carrée de format n. Soient i et j deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
Le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $A \times 0_n$ est

$$a_{i,1} \times 0 + a_{i,2} \times 0 + \ldots + a_{i,n} \times 0 = 0.$$

Donc tous les coefficients de la matrice $A \times 0_n$ sont nuls puis $A \times 0_n = 0$.
De même, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $0_n \times A$ est

$$0 \times a_{1,j} + 0 \times a_{2,j} + \ldots + 0 \times a_{n,j} \times 0 = 0.$$

Donc tous les coefficients de la matrice $0_n \times A$ sont nuls puis $0_n \times A = 0$.

• Soit A une matrice carrée de format n. Soient i et j deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
Dans la colonne j de I_n, il y a un 1 à la ligne j et des 0 ailleurs. Donc, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $A \times I_n$ est

$$a_{i,1} \times 0 + \ldots + a_{i,j-1} \times 0 + a_{i,j} \times 1 + a_{i,j+1} \times 0 + \ldots + a_{i,n} \times 0 = a_{i,j}.$$

Ainsi, pour chaque i et j, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice $A \times I_n$ est égal au coefficient ligne i, colonne j, de la matrice A puis $A \times I_n = A$.
De même, dans la ligne i de I_n, il y a un 1 à la colonne i et des 0 ailleurs. Donc, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $I_n \times A$ est

$$0 \times a_{1,j} + \ldots + 0 \times a_{i-1,j} + 1 \times a_{i,j} + 0 \times a_{i+1,j} + \ldots + 0 \times a_{n,j} \times 0 = a_{i,j}.$$

Ainsi, pour chaque i et j, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice puis $I_n \times A = A$.

On a montré au passage que pour tout vecteur colonne X, $I_n \times X = X$.

• Soient A, B et C trois matrices carrées de format n. Soient i et j deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
Le coefficient ligne i, colonne j, de $A \times (B+C)$ est

$$a_{i,1} \times (b_{1,j} + c_{1,j}) + a_{i,2} \times (b_{2,j} + c_{2,j}) + \ldots + a_{i,n} \times (b_{n,j} + c_{n,j}).$$

Ce coefficient est égal à $(a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \ldots + a_{i,n} \times b_{1,n}) + (a_{i,1} \times c_{1,j} + a_{i,2} \times c_{2,j} + \ldots + a_{i,n} \times c_{1,n})$ qui est le coefficient ligne i, colonne j, de $A \times B + A \times C$. Donc, $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$.
On montre de même que $(B+C) \times A = B \times A + C \times A$.

Commentaire. Comme on l'a déjà dit pour l'addition, la propriété 1) se réénonce en disant que la multiplication des matrices carrées est **associative**. On peut donc écrire une expression du type $A \times B \times C$ qui signifie au choix $(A \times B) \times C$ ou $A \times (B \times C)$.
L'associativité d'une opération n'a rien d'automatique. Vous connaissez deux opérations non associatives.
La première est la division des réels. L'expression $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}$ n'a aucun sens car il faut connaître l'ordre dans lequel on effectue les divisions. Si on calcule d'abord b/c, on obtient $\dfrac{a}{\left(\dfrac{b}{c}\right)} = a \times \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$ et si on calcule d'abord a/b, on obtient $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$, ce qui n'est pas la même chose.
La deuxième est l'exponentiation. L'expression a^{b^c} n'a aucun sens car il faut connaître l'ordre dans lequel on élève à un certain exposant. Par exemple, $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$ alors que $\left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64$. ❑

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Vocabulaire. La propriété 3) dit quant à elle que la multiplication des matrices carrées de format n est **distributive** sur l'addition des matrices carrées de format n.
La propriété 2)b) se réénonce en disant que la matrice I_n est **élément neutre** pour la multiplication des matrices carrées. La matrice I_n joue pour la multiplication des matrices carrées le rôle que joue le nombre 1 pour la multiplication des nombres : pour toute matrice carrée, $A \times I_n = A$ et pour tout réel x, $x \times 1 = x$. ❑

e) Les dangers de la multiplication des matrices

Danger n° 1. On reprend les deux matrices de l'exemple 2 du paragraphe c). Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a vu que $A \times B = 0_2$ alors que $B \times A = A \neq 0_2$. Il est donc possible de trouver deux matrices carrées A et B de même format telles que $A \times B \neq B \times A$ ou encore

la multiplication des matrices carrées n'est pas commutative.

Quand on multiplie deux matrices carrées, il faut bien faire attention à l'ordre dans lequel on écrit ces deux matrices. Attention néanmoins, le fait que la multiplication des matrices ne soit pas commutative ne signifie pas que l'on n'a jamais $A \times B = B \times A$:

Vocabulaire. Quand deux matrices carrées A et B de même format vérifient $A \times B = B \times A$, on dit que les matrices A et B **commutent**. Par exemple, si A est une matrice carrée quelconque de format n, les matrices A et I_n commutent puisque $A \times I_n = I_n \times A = A$. ❑

C'est encore pire si on multiplie une matrice carrée par un vecteur colonne : le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ existe et est égal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par contre, le produit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'existe pas.

Danger n° 2. Avec les matrices A et B précédentes, on a trouvé $A \times B = 0_2$ et pourtant $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$.
La phrase : « un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » est donc fausse.

Le produit de A et B peut être nul bien que ni A, ni B ne soient nulles.

Par contre, si $A = 0_2$ ou $B = 0_2$, alors on a $A \times B = 0_2$.

$$A = 0_2 \text{ ou } B = 0_2 \Rightarrow A \times B = 0_2.$$
$$A \times B = 0_2 \not\Rightarrow A = 0_2 \text{ ou } B = 0_2.$$

Danger n° 3. Toujours avec les mêmes matrices A et B, on a $A \times B = 0_2 = 0_2 \times B$ et pourtant $A \neq 0_2$ ou encore, on ne peut pas simplifier la matrice B dans l'égalité $A \times B = 0_2 \times B$.

On peut donc trouver des matrices carrées A, B et C telles que $A \times B = A \times C$ et $B \neq C$ ou encore $A \times B = A \times C$ n'entraine pas $B = C$.

On ne peut pas simplifier une matrice A pour la multiplication
de part et d'autre d'une égalité.

Donnons un autre exemple moins caricatural. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + (-1) \times 1 & 2 \times (-1) + (-1) \times 5 \\ (-4) \times 3 + 2 \times 1 & (-4) \times (-1) + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}.$$

et

$$A \times C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4 + (-1) \times 3 & 2 \times (-3) + (-1) \times 1 \\ (-4) \times 4 + 2 \times 3 & (-4) \times (-3) + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}.$$

De nouveau, on a $B \neq C$ et $A \times B = A \times C$ et donc de nouveau, il n'est pas question de simplifier la matrice A de part et d'autre de l'égalité $A \times B = A \times C$.

Danger n° 4. Reprenons les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note respectivement A^2, B^2 et $(A+B)^2$ les produits $A \times A$, $B \times B$ et $(A+B) \times (A+B)$. On reviendra sur la notion d'exposant dans le pargraphe suivant.
On a successivement $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

D'autre part,

- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$
- $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ et donc aussi $2AB = 0_2$.
- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$.

On en déduit que

$$A^2 + 2AB + B^2 = 0_2 + 0_2 + B = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En résumé, $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc,

il est possible que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Analysons le problème. Par définition,

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A \times A + A \times B + B \times A + B \times B = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Si par malheur, on a $AB \neq BA$, on ne peut pas poursuivre en écrivant $A^2 + 2AB + B^2$. Par contre, si les matrices A et B commutent, alors on a à disposition les identités remarquables usuelles :

Théorème 6. Soit n un entier naturel non nul. Soient A et B deux matrices carrées de format n.
Si les matrices A et B commutent, alors

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,
- $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$,
- $(A+B) \times (A-B) = A^2 - B^2$.

f) Puissances d'une matrice carrée

Définition 10. Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice carrée de format n.
On pose $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour $p \geqslant 2$, $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Les puissances des matrices carrées vérifient les règles usuelles de calcul :

Théorème 7. Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice carrée de format n.
1) Pour tous entiers naturels p et q, $A^p \times A^q = A^{p+q}$.
2) Pour tous entiers naturels p et q, $(A^p)^q = A^{pq}$.

Exercice 1. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
1) Calculer N^2 et N^3.
2) En déduire N^p pour tout entier naturel $p \geqslant 3$.

Solution. 1)

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$N^3 = N \times N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2) Montrons par récurrence que pour tout $p \geqslant 3$, $N^p = 0$.

- L'égalité est vraie quand $p = 3$.
- Soit $p \geqslant 3$. Supposons que $N^p = 0_3$ et montrons que $N^{p+1} = 0_3$.

$$\begin{aligned} N^{p+1} &= N \times N^p = N \times 0_3 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 0_3. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } p \geqslant 3,\ N^p = 0_3.}$$

Exercice 2. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer J^2 en fonction de J.

2) En déduire J^p pour tout entier naturel $p \geqslant 1$.

Solution. **1)**

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2J.$$

$$\boxed{J^2 = 2J.}$$

2) On a $J^3 = J^2 \times J = 2J \times J = 2J^2 = 2 \times 2J = 2^2 J$ et $J^4 = J^3 \times J = 2^2 J \times J = 2^2 J^2 = 2^2 \times 2J = 2^3 J$.
On note aussi que $J^2 = 2^1 J$ et $J = 2^0 J$
On conjecture alors que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, $J^p = 2^{p-1} J$.

Montrons par récurrence que pour tout $p \geqslant 1$, $J^p = 2^{p-1} J$.

- Puisque $J^1 = J = 2^0 J$, l'égalité est vraie quand $p = 1$.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons que $J^p = 2^{p-1} J$ et montrons que $J^{p+1} = 2^{(p+1)-1} J$.

$$\begin{aligned} J^{p+1} &= J^p \times J = 2^{p-1} J \times J \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2^{p-1} J^2 = 2^{p-1} \times 2J \text{ (d'après 1))} \\ &= 2^{(p+1)-1} J. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } p \geqslant 1,\ J^p = 2^{p-1} J = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 2^{p-1} \end{pmatrix}.}$$

III. Matrices carrées inversibles. Inverse d'une matrice carrée inversible

Définition 11. Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice carrée de format n.
A est inversible pour la multiplication si et seulement si il existe une matrice B carrée de format n telle que

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Commentaire 1. Une matrice carrée, même non nulle, peut ne pas être inversible. Considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cherhcons s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = I_2$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, le coefficient ligne 2, colonne 2, de la matrice $A \times B$ est égal à 0 et donc $A \times B \neq I_2$ car le coefficient ligne 2, colonne 2, de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est égal à 1.
Ainsi, pour toute matrice carrée B de format 2, on a $A \times B \neq I_2$ et donc la matrice A n'est pas inversible (et est non nulle). ❑

Commentaire 2. La multiplication des matrices n'est pas commutative. Donc il est possible d'avoir $A \times B \neq B \times A$. Néanmoins, on peut démontrer que si on trouve une matrice B telle que $A \times B = I_n$, alors on a automatiquement $B \times A = I_n$ (nous admettrons ce résultat) :

Théorème 8. Soit n un entier naturel non nul. Soient A et B deux matrices carrées de format n.
Si $A \times B = I_n$, alors $B \times A = I_n$.

Théorème 9. Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice carrée de format n. S'il existe une matrice B carrée de format n telle que $A \times B = B \times A = I_n$, alors il n'en existe qu'une ou encore B est unique.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Démonstration. Soit A une matrice carrée de format n. Soient B et C deux matrices carrées de format n telles que $A\times B=B\times A=I_n$ et $A\times C=C\times A=I_n$. Alors, d'après le théorème 5,

$$B=B\times I_n=B\times(A\times C)=(B\times A)\times C=I_n\times C=C.$$

Ceci montre l'unicité de la matrice B.

Définition 12. Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice carrée de format n inversible.
La matrice B carrée de format n telle que $A\times B=B\times A=I_n$ s'appelle **l'inverse de** A et se note A^{-1}.

Exercice 3. Soit $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.
Montrer que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

Solution. Soient a, b, c et d quatre réels puis $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix},$$

puis

$$AB=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+c&2b+d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2a+c=1\\a+2c=0\\2b+d=0\\b+2d=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-2c\\2(-2c)+c=1\\d=-2b\\b+2(-2b)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c=-\dfrac{1}{3}\\a=\dfrac{2}{3}\\b=-\dfrac{1}{3}\\d=\dfrac{2}{3}\end{array}\right..$$

Soit alors $B=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}&-\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{3}&\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $AB=I_2$ et on a donc trouvé une matrice B telle que $A\times B=I_2$. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1}=B$.

$$\boxed{A\text{ est inversible et }A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}.}$$

Commentaire. On a expliqué plus haut que si $AB=I_2$, on a automatiquement $B\times A=I_2$.
Vérifions-le explicitement.

$$BA=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}&-\dfrac{1}{3}\\-\dfrac{1}{3}&\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}&\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\\-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}&-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2.$$

❑

Exercice 4. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

2) Vérifier que $A = P \times D \times P^{-1}$.

3) Déterminer D^p pour tout entier naturel p (on calculera les premières puissances de D puis on conjecturera un résultat que l'on démontrera par récurrence).

4) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p, $A^p = PD^pP^{-1}$.

b) En déduire l'expression de A^p pour tout entier naturel p.

5) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c) Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Solution.

1) Soient a, b, c, d quatre réels puis $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix},$$

puis

$$PQ = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+c=1 \\ -a+c=0 \\ b+d=0 \\ -b+d=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=a \\ a+a=1 \\ b=-d \\ -(-d)+d=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ d=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Soit alors $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $PQ = I_2$ et par suite,

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2)

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel p, $D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}$.

- Si $p = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = D^0$. L'égalité est donc vraie quand $p = 0$.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

• Soit $p \geqslant 0$. Supposons que $D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}$ et montrons que $D^{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{p+1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} D^{p+1} &= D^p \times D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{p+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } p,\ D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}.}$$

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel p, $A^p = PD^pP^{-1}$.

- Si $p = 0$, $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$. L'égalité est donc vraie quand $p = 0$.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons que $A^p = PD^pP^{-1}$ et montrons que $A^{p+1} = PD^{p+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \times A = PD^pP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^pI_2DP^{-1} = PD^pDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel p, $A^p = PD^pP^{-1}$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel p

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^p \\ -1 & 3^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^p+1}{2} & \frac{3^p-1}{2} \\ \frac{3^p-1}{2} & \frac{3^p+1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } p,\ A^p = \begin{pmatrix} \frac{3^p+1}{2} & \frac{3^p-1}{2} \\ \frac{3^p-1}{2} & \frac{3^p+1}{2} \end{pmatrix}.}$$

5) a) Soit n un entier naturel.

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + v_n \\ u_n + 2v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ X_{n+1} = AX_n.}$$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $X_n = A^nX_0$.

- $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $X_n = A^nX_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$.

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n = A \times A^nX_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1}X_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ X_n = A^nX_0.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 &= \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré que

pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ et $v_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Commentaire. Dans l'exercice précédent, la technique mise en œuvre pour calculer A^n est une technique générale : quand cela est possible, on ramène le calcul de A^n au calcul de D^n où D est une matrice diagonale.
Il se trouve que les puissances successives d'une matrice diagonale sont très faciles à calculer. En effet, on montre facilement par récurrence que si $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ alors pour tout entier naturel n,

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.$$

IV. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Exemple 1. Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple 2. Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 13 \\ x - z = 2 \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exemple 3. Le système d'équations linéaires $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ecriture générale d'un système de n équations linéaires à n inconnues.
Soient $x_1, \dots, x_n$, n nombres réels. Un système à n équations linéaires d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ admet l'écriture générale suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases},$$

où les nombres $a_{i,j}$ et les nombres b_k sont des nombres réels.

Ce système s'écrit matricellement $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ou encore $AX = B$ où
$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Chercher les n nombres inconnus $x_1, \dots, x_n$ équivaut alors à chercher le vecteur colonne X.

Il existe une situation concernant la matrice A dans laquelle on peut « résoudre » une bonne fois pour toutes le système. C'est la situation où la matrice A est inversible :

Théorème 10. Soit n un entier naturel non nul. Soient A une matrice cérrée de format n et B un vecteur colonne de format n.
Soit X un vecteur colonne de format n.
Si la matrice carrée A est inversible, alors le système $AX = B$ admet un vecteur colonne solution et un seul à savoir le vecteur colonne $X_0 = A^{-1}B$.
On dit dans ce cas que le système est un **système de Cramer**.

Démonstration. Soiant A une matrice carrée inversible de format n et B un vecteur colonne de format n.
Soit X un vecteur colonne de format n.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_nX + A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Réciproquement, si $X = A^{-1}B$, alors $AX = AA^{-1}B = I_nB = B$.

Finalement, $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Exemple. Considérons le système $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnues les nombres réels x, y et z. Cec système s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si la matrice A est inversible, ce système admet un unique vecteur colonne solution à savoir $X_0 = A^{-1}B$.

La calculatrice fournit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 17/15 & 1/3 & -8/15 \\ -14/15 & -1/3 & 11/15 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. En particulier A est inversible car dans le cas contraire, la calculatrice affiche un message d'erreur. On calcule alors :

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 17/15 & 1/3 & -8/15 \\ -14/15 & -1/3 & 11/15 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$ admet un unique triplet de réels solution à savoir le triplet $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

On donne la procédure pour obtenir l'inverse de A avec une calculatrice.

TI 83 +	**CASIO GRAPH 35 +**
1) Rentrer la matrice A On tape $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Matrice}}$ puis EDIT puis ▶ 1 :[A]. On définit le format : 3×3 puis ENTER. On remplit la matrice : 1,1= 2 puis ENTER puis 1,2= 1 puis ENTER … puis $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Quit}}$	**1)** Rentrer la matrice A Appuyer sur $\boxed{\text{F1}}$ (▶ MAT) pour afficher l'éditeur de matrices. Mettre MAT A en surbrillance. Définir le format de la matrice A en choisisant F3 (DIM). Préciser le nombre de lignes et de colonnes (3 $\boxed{\text{EXE}}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$). Remplir la matrice (en ligne) 2 $\boxed{\text{EXE}}$ 1 $\boxed{\text{EXE}}$ -1 $\boxed{\text{EXE}}$ 1 $\boxed{\text{EXE}}$ …
2) On calcule l'inverse de A. Pour cela, on récupère la matrice A avec $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{Matrice}}$ puis NAME puis ▶ 1 :[A] puis ENTER. On obtient [A] à l'écran. L'inverse de A est obtenu en appuyant sur $\boxed{x^{-1}}$ puis ENTER. Si on veut les résultats sous forme fractionnaire, on intercale $\boxed{x^{-1}}$ puis $\boxed{\text{Math}}$ puis MATH 1 :Frac ENTER puis ENTER.	**2)** On calcule l'inverse de A. Utiliser la séquence suivante : $\boxed{\text{OPTION}}$ $\boxed{\text{F2}}$ (MAT) $\boxed{\text{F1}}$ (Mat) $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{X},\theta,\text{T}}$ (A) $\boxed{)}$ (x^{-1}) $\boxed{\text{EXE}}$ Si la matrice n'est pas inversible, la calculatrice renvoie un message d'erreur.

V. *Utilisation des matrices pour l'étude de certains processus discrets*

1) Etude de la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n + B$

On se donne une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ de format 2 et un vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ de format 2.

On s'interesse aux couples de suites $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \begin{cases} u_{n+1} = a_{1,1}u_n + a_{1,2}v_n + b_1 \\ v_{n+1} = a_{2,1}u_n + a_{2,2}v_n + b_2 \end{cases}.$$

Si pour chaque entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n,

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}u_n + a_{1,2}v_n + b_1 \\ a_{2,1}u_n + a_{2,2}v_n + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}u_n + a_{1,2}v_n \\ a_{2,1}u_n + a_{2,2}v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = AX_n + B.$$

Remarque. On note que le calcul précédent et tout ce qui va suivre se généralise aux formats 3, 4, ... Dans ce cas, on considère 3 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou 4 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... ❏

Nous allons essayer de donner quelques généralités sur ces « suites couplées ». Commençons par définir la notion de convergence d'une suite de vecteurs colonnes :

Définition 13. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs colonnes de format $p \geqslant 2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \vdots \end{pmatrix}$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si chacune des « suites coordonnées » $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... converge. En cas de convergence de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to+\infty} u_n \\ \lim_{n\to+\infty} v_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Exemple. $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{2^n} \\ 2 - \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou aussi $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \\ 1 - e^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ❏

On donne maintenant un résultat sur la limite d'une suite de vecteurs colonnes vérifiant la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n + B$ dans le cas où la suite de vecteurs colonnes converge :

Théorème 11. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A une matrice carrée de format p et B un vecteur colonne de format p.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs colonnes vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ X_{n+1} = AX_n + B.$$

Si la suite de vecteurs $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un vecteur colonne X vérifiant :

$$X = AX + B.$$

Démonstration. Pour la compréhension, nous démontrerons ce résultat quand le format p est égal à 2.

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et pour chaque entier naturel n, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. D'après un calcul fait plus haut, pour chaque entier naturel n, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = a_{1,1}u_n + a_{1,2}v_n + b_1 \\ v_{n+1} = a_{2,1}u_n + a_{2,2}v_n + b_2 \end{cases} \quad (*).$$

Supposons que la suite de vecteurs colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur colonne X. Posons $X = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell' \end{pmatrix}$.

Par définition, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont pour limite respectives ℓ et ℓ'. Quand on fait tendre n vers $+\infty$ dans les égalités $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} \ell = a_{1,1}\ell + a_{1,2}\ell' + b_1 \\ \ell' = a_{2,1}\ell + a_{2,2}\ell' + b_2 \end{cases}.$$

Ces égalités s'écrivent matriciellement $\begin{pmatrix} \ell \\ \ell' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell \\ \ell' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ou encore $X = AX + B$.

L'égalité $X = AX + B$ est une équation dont l'inconnue est un vecteur colonne X. Il est possible que cette équation n'ait pas de solution ou à l'inverse, ait une infinité de solutions. Il existe néanmoins une situation où l'équation $X = AX + B$ admet une solution et une seule. C'est cette situation qu'analyse le théorème suivant.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

Théorème 12. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A une matrice carrée de format p et B un vecteur colonne de format p.
Soit X un vecteur colonne de format p.
Si la matrice $I_p - A$ est inversible, l'équation $X = AX + B$, d'inconnue X vecteur colonne de format p, admet une solution et une seule. Plus précisément,

$$X = AX + B \Leftrightarrow X = (I_p - A)^{-1} B.$$

Le vecteur colonne $X_0 = (I_p - A)^{-1} B$ est l'**état stable** du processus discret.

Démonstration. Soit X un vecteur colonne de format $p \geqslant 2$. Puisque la matrice $I_p - A$ est inversible, le théorème 10 permet d'écrire

$$X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I_p - A) X = B \Leftrightarrow X = (I_p - A)^{-1} B.$$

Commentaire. Dans le cas particulier où $B = 0$, l'unique vecteur colonne tel que $X = AX$ est le vecteur colonne $X = 0$. ❏

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Trouver les vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tels que $X = AX + B$.

Solution. Soient a, b et c trois réels puis $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

La calculatrice montre que $I_3 - A$ est inversible et que $(I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{28} & \frac{1}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{28} & \frac{1}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}$. On peut alors écrire

$$X = AX + B \Leftrightarrow X - AX = B \Leftrightarrow (I_3 - A) X = B \Leftrightarrow X = (I_3 - A)^{-1} B.$$

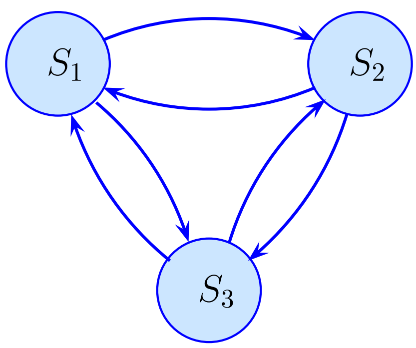
Finalement, $X = AX + B \Leftrightarrow X = (I_3 - A)^{-1} B$ et donc l'équation proposée admet une solution et une seule à savoir $X_0 = (I_3 - A)^{-1} B$. On obtient

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{28} & \frac{1}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{1}{28} \\ \frac{1}{28} & \frac{1}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20+4+4}{28} \\ \frac{20+4+4}{28} \\ \frac{20+4+4}{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

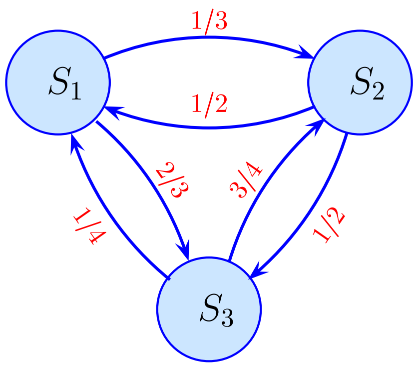
2) Un exemple d'application : marche aléatoire dans un graphe

On considère le graphe suivant ayant trois sommets S_1, S_2 et S_3.



On va se déplacer dans ce graphe d'un sommet à un autre en suivant les flèches.
On se place en S_1 au départ qui est l'étape n° 0 puis on se déplace de manière aléatoire. On suppose que :

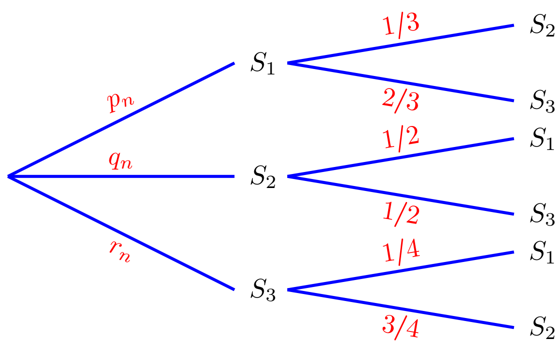
- quand on est en S_1 la probabilité d'aller en S_2 est $\dfrac{1}{3}$ et la probabilité d'aller en S_3 est $\dfrac{2}{3}$,
- quand on est en S_2 la probabilité d'aller en S_1 est $\dfrac{1}{2}$ et la probabilité d'aller en S_3 est $\dfrac{1}{2}$,
- quand on est en S_3 la probabilité d'aller en S_1 est $\dfrac{1}{4}$ et la probabilité d'aller en S_3 est $\dfrac{3}{4}$.



On note qu'on change obligatoirement de sommet à chaque étape.

Pour chaque entier naturel n, on note p_n la probabilité d'être en S_1 à l'étape numéro n, q_n la probabilité d'être en S_2 à l'étape numéro n et r_n la probabilité d'être en S_3 à l'étape numéro n. Puisque à l'étape n° 0, on est en S_1, on a en particulier $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et $r_0 = 0$.

Etudions maintenant, pour chaque entier naturel n, les liens qui existe entre les probabilités p_n, q_n, r_n et p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1}. Pour cela, représentons la situation par un arbre de probabilités.



La formule des probabilités totales fournit :

$$\left\{\begin{array}{l} p_{n+1} = q_n \times \dfrac{1}{2} + r_n \times \dfrac{1}{4} \\[2mm] q_{n+1} = p_n \times \dfrac{1}{3} + r_n \times \dfrac{3}{4} \\[2mm] r_{n+1} = p_n \times \dfrac{2}{3} + r_n \times \dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

On sait que ces égalités peuvent s'écrire matriciellement. Pour cela, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et pour chaque entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. On obtient

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ \frac{1}{3}p_n + \frac{3}{4}r_n \\ \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = AX_n.$$

On sait alors que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$ ou encore

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A s'appelle la **matrice de transition** de la marche aléatoire. Ligne i, colonne j, de la matrice A, on trouve la probabilité d'aller au sommet S_i sachant que l'on est au sommet S_j.

Par exemple, ligne 3, colonne 1, on trouve $\frac{2}{3}$ qui est la probabilité d'aller au sommet S_3 sachant que l'on est au sommet S_1 et ligne 2, colonne 2, on trouve 0 qui est la probabilité d'aller au sommet S_2 sachant que l'on est au sommet S_2.

Que peut-on faire avec cette matrice ? On peut dans un premier temps donner les probabilités d'être d'être en un sommet donné à une étape donnée. Par exemple, la calculatrice fournit

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{24} \end{pmatrix},$$

puis

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = X_2 = A^2 X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{24} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

ou aussi $A^{10} = \begin{pmatrix} 0,272\ldots & 0,272\ldots & 0,273\ldots \\ 0,362\ldots & 0,273 & 0,362\ldots \\ 0,365\ldots & 0,365\ldots & 0,363\ldots \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} p_{10} \\ q_{10} \\ r_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,272\ldots \\ 0,362\ldots \\ 0,365\ldots \end{pmatrix}$.

On peut représenter dans un tableau les valeurs successives de p_n, q_n et r_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	0	$0,33\ldots$	$0,29\ldots$	$0,23\ldots$	$0,30\ldots$	$0,25\ldots$	$0,28\ldots$	$0,26\ldots$	$0,27\ldots$	$0,27\ldots$
q_n	0	$0,33\ldots$	$0,5$	$0,23\ldots$	$0,45\ldots$	$0,31\ldots$	$0,38\ldots$	$0,35\ldots$	$0,36\ldots$	$0,36\ldots$	$0,36\ldots$
r_n	0	$0,66\ldots$	$0,16\ldots$	$0,47\ldots$	$0,31\ldots$	$0,38\ldots$	$0,35\ldots$	$0,36\ldots$	$0,36\ldots$	$0,36\ldots$	$0,36\ldots$

Les valeurs obtenues semblent se stabiliser respectivement autour de $0,27\ldots$, $0,36\ldots$ et $0,36\ldots$ ce que l'on conjecture.

Etude de l'état stable du système. Etudions la convergence des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous n'avons pas à ce stade les moyens de montrer que ces trois suites convergent. Nous l'avons simplement conjecturé et nous admettrons ce fait. Nous avons alors la possibilité de déterminer les limites p, q et r de ces trois suites. C'est ce que nous allons faire.

Posons $X = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. On sait que $X = AX$ ou encore $(I_3 - A)X = 0$. La matrice $I_3 - A$ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Malheureusement, quand on demande l'inverse de cette matrice à la calculatrice, celle-ci nous renvoie un message d'erreur. La matrice $I_3 - A$ n'est pas inversible. Nous ne sommes donc pas dans la situation où l'équation $X = AX$ admet une soultion et une seule. Poursuivons.

© Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

$$(I_3 - A)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{3} & 1 & -\dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p - \dfrac{1}{2}q - \dfrac{1}{4}r = 0 \\ -\dfrac{1}{3}p + q - \dfrac{3}{4}r = 0 \\ -\dfrac{2}{3}p - \dfrac{1}{2}q + r = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4p - 2q - r = 0 \\ -4p + 12q - 9r = 0 \\ -4p - 3q + 6r = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 4p - 2q \\ -4p + 12q - 9(4p - 2q) = 0 \\ -4p - 3q + 6(4p - 2q) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 4p - 2q \\ -40p + 30q = 0 \\ 20p - 15q = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = 4p - 2q \\ q = \dfrac{4}{3}p \\ q = \dfrac{4}{3}p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q = \dfrac{4}{3}p \\ r = \dfrac{4}{3}p \end{array}\right. \quad (I).$$

Ainsi, l'équation $X = AX$ admet une infinité de solutions : ce sont tous les vecteurs colonnes de la forme $\begin{pmatrix} a \\ \dfrac{4}{3}a \\ \dfrac{4}{3}a \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque. Par exemple, les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (obtenu quand $a = 0$) ou $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (obtenu quand $a = 4$) sont des solutions de l'équation $X = AX$. Parmi toutes ces solutions, le vecteur colonne $\begin{pmatrix} p \\ q \\ q \end{pmatrix}$ possède une propriété supplémentaire. Puisque pour tout entier naturel n, on a $p_n + q_n + r_n = 1$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$p + q + r = 1 \quad (II).$$

En combinant (I) et (II), on obtient $p + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}p = 1$ ou encore $p = \dfrac{3}{11}$ puis $q = r = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{11} = \dfrac{4}{11}$.

Ainsi, les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $p = \dfrac{3}{11} = 0,2727\ldots$, $q = \dfrac{4}{11} = 0,3636\ldots$ et $r = \dfrac{4}{11} = 0,3636\ldots$

Ces trois probabilités constituent l'**état stable** du système. Au bout d'un grand nombre d'étapes, on a environ trois chances sur 11 d'être en S_1, quatre chances sur 11 d'être en S_2 et quatre chances sur 11 d'être en S_3.