BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

1.	(b)
2.	(b)
3.	(c)
4.	(a)

Explications.

1. On note a, b et c les affixes des points A, B et C. On a

$$b-a=(-3-i)-(-2+3i)=-1-4i,\ c-a=(2,08+1,98i)-(-2+3i)=4,08-1,02i \text{ et}$$
$$c-b=(2,08+1,98i)-(-3-i)=5,08+2,98i\ .$$

Puis

$$AB=|b-a|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17},\ AC=|c-a|=\sqrt{4,08^2+(-1,02)^2}=\sqrt{16,6464+1,0404}=\sqrt{17,6868} \text{ et}$$
$$BC=|c-b|=\sqrt{5,08^2+2,98^2}=\sqrt{25,8064+8,8804}=\sqrt{34,6868}.$$

Les trois distances sont deux à deux distinctes et donc le triangle ABC n'est pas isocèle. Le plus grand des trois côtés est BC et de plus $AB^2+AC^2=17+17,6868=34,6868=BC^2$. Donc le triangle ABC est rectangle en A.

2. Notons A le point d'affixe $a=4i$ et B le point d'affixe $b=-2$. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z'|=1\Leftrightarrow z\neq b \text{ et } \left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1\Leftrightarrow z\neq b \text{ et } |z-a|=|z-b|\Leftrightarrow M\neq B \text{ et } AM=BM\Leftrightarrow AM=BM\Leftrightarrow M\in \text{med}[AB].$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

3.

$$z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\neq b \text{ et il existe un réel } k \text{ tel que } z-a=k(z-b)\Leftrightarrow M\neq B \text{ et il existe un réel } k \text{ tel que } \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{BM}$$
$$\Leftrightarrow M\in(AB)\setminus\{B\}.$$

L'ensemble cherché est la droite (AB) privée du point B.

4. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est

$$z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega,$$

ce qui donne ici

$$z'=e^{-i\pi/3}(z-i)+i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-i)+i=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

EXERCICE 2

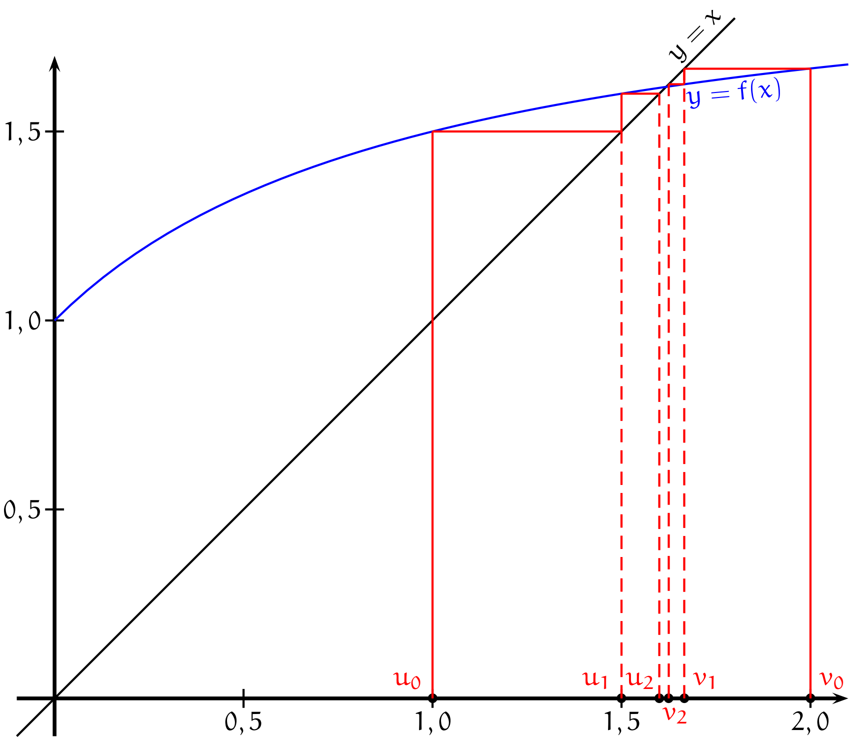
1. f est dérivable sur $[0;2]$ en tant que fraction rationnelle définie sur $[0;2]$ et pour x élément de $[0;2]$,

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est positive sur l'intervalle $[0;2]$ et donc la fonction f est croissante sur $[0;2]$.
Soit x un élément de $[0;2]$. Puisque f est croissante sur l'intervalle $[1;2]$, on a $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ ce qui s'écrit encore $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$. Mais $\frac{3}{2} \geq 1$ et $\frac{5}{3} \leq 2$. Par suite, $1 \leq f(x) \leq 2$. On a montré que

pour tout réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a $f(x) \in [1;2]$.

2. a.



Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante, que la suite (v_n) soit décroissante et que les deux suites (u_n) et (v_n) soient convergentes et possèdent la même limite.
b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.

- Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ et donc $1 \leq v_0 \leq 2$. L'encadrement à démontrer est donc vrai quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $1 \leq v_n \leq 2$. D'après la question 1., on peut affirmer que $1 \leq f(v_n) \leq 2$ ou encore que $1 \leq v_{n+1} \leq 2$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

- Pour $n = 0$, on a $v_1 - v_0 = \frac{5}{3} - 2 \leq 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $v_{n+1} - v_n \leq 0$. D'après ci-dessus, les deux expressions $v_n + 1$ et $v_{n+1} + 1$ sont strictement positives. De plus

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_{n+1} &= \frac{2v_{n+1}+1}{v_{n+1}+1} - \frac{2v_n+1}{v_n+1} = \frac{(2v_{n+1}+1)(v_n+1) - (v_{n+1}+1)(2v_n+1)}{(v_{n+1}+1)(v_n+1)} \\ &= \frac{v_{n+1} - v_n}{(v_{n+1}+1)(v_n+1)} \leq 0 \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} \leq v_n.}$$

c. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} \\ &= \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.}$$

Comme le produit $(v_n+1)(u_n+1)$ est strictement positif, le signe de $v_{n+1} - u_{n+1}$ est le signe de $v_n - u_n$.

Ainsi, la suite $(v_n - u_n)$ est de signe constant à savoir le signe de son premier terme. Or, $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $v_0 - u_0 > 0$. On en déduit que la suite $(v_n - u_n)$ est positive.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_n - u_n \geq 0.}$$

Soit n un entier naturel. Puisque $u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$, on a $u_n+1 \geq 2$ et $v_n+1 \geq 2$ puis $(u_n+1)(v_n+1) \geq 4$ et finalement $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)} \leq \dfrac{1}{4}$. Mais alors, puisque $v_n - u_n \geq 0$,

$$\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n).$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n).}$$

d. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

- Pour $n = 0$, on a $v_0 - u_0 = 1$ et $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0 = 1$. Donc $v_0 - u_0 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^0$. Ainsi l'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. Alors

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n-u_n) \leq \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.}$$

e. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite $(v_n - u_n)$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

En résumé, la suite (u_n) croît, la suite (v_n) décroît et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$. Les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc convergentes et ont même limite.

$$\boxed{\text{Les deux suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers un même réel.}}$$

Puisque pour tout entier naturel n on a $u_n \geq 1$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on a encore $a \geq 1$.

Puisque pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ on a encore $a = \dfrac{2a+1}{a+1}$. Or

$$a = \frac{2a+1}{a+1} \Leftrightarrow a(a+1) = 2a+1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$. Cette équation admet donc deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Seul x_1 est un nombre supérieur ou égal à 1 et donc

$$\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

EXERCICE 3

1. a. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty}(2-e^{-x}) = 2$. Comme $2>0$ et comme d'autre part $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b. Soit x un réel positif.

$$f(x)-(2x-2) = (x-1)(2-e^{-x})-(2x-2) = 2(x-1)-e^{-x}(x-1)-2(x-1) = -e^{-x}(x-1) = (-x)e^{-x}+e^{-x}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, on a $\lim_{x\to+\infty}(-x)e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$. Comme d'autre part $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x-2)) = 0$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = 2x-2 \text{ est asymptote à } \mathscr{C} \text{ en } +\infty.}$$

c. Soit x un réel positif.
Soient M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Δ de même abscisse.

$$y_M - y_N = f(x)-(2x-2) = -e^{-x}(x-1).$$

Puisque $e^{-x}>0$, le signe de y_M-y_N est le signe de $-(x-1)$ et donc
- si $0\leq x<1$, $y_M-y_N>0$ ou encore $y_M>y_N$,
- si $x>1$, $y_M-y_N<0$ ou encore $y_M<y_N$,
- si $x=1$, $y_M-y_N=0$ ou encore $y_M=y_N=2(1-1)=0$.

On a montré que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est strictement au-dessus de } \Delta \text{ sur } [0,1[, \text{ strictement au-dessous sur }]1,+\infty[\text{ et } \mathscr{C} \text{ coupe } \Delta \text{ au point } (1,0).}$$

2. a. f est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 1.(2-e^{-x})+(x-1)e^{-x} = xe^{-x}+2-2e^{-x} = xe^{-x}+2(1-e^{-x}).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ f'(x) = xe^{-x}+2(1-e^{-x}).}$$

b. Soit x un réel strictement positif. Alors $-x<0$ puis $e^{-x}<e^{0}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. Ceci fournit $e^{-x}<1$ et donc $2(1-e^{-x})>0$. D'autre part, $xe^{-x}>0$ et donc $f'(x)>0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } x,\ f'(x)>0.}$$

c. $f'(0) = 0e^{-0}+2(1-e^{-0}) = 0$. On en déduit que $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

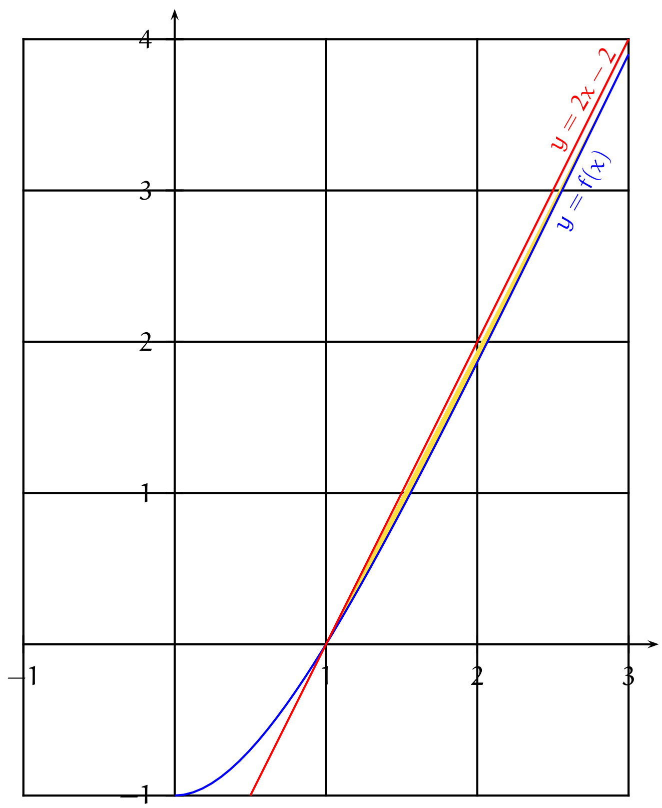
3. Notons $\mathscr{D}$ le domaine considéré et $\mathscr{A}$ son aire exprimée en cm^2.
D'après la question 1.c., la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ sur l'intervalle $[1;3]$. L'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire est donc égale à $\int_1^3 ((2x-2)-f(x))\,dx$ ou encore $\int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx$. Notons I cette intégrale et calculons I.

Pour x réel élément de $[1;3]$, posons $u(x) = x-1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[1;3]$ et pour tout réel x de $[1;3]$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus, les deux fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[1;3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx = \left[(x-1)(-e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 1.(-e^{-x})\,dx = -(3-1)e^{-3} + (1-1)e^{-1} - \int_1^3 (-e^{-x})\,dx \\ &= -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]_1^3 = -2e^{-3} - (e^{-3} - e^{-1}) = e^{-1} - 3e^{-3}. \end{aligned}$$

L'unité d'aire est égale à 4 cm^2 et donc

$$\boxed{\mathscr{A} = 4(e^{-1} - 3e^{-3})\ \text{cm}^2 \text{ ou encore } \mathscr{A} = 0,874\ldots\ \text{cm}^2.}$$



4. a. Soit x un réel positif et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x. La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en M est parallèle à la droite Δ si et seulement si $f'(x)$, le coefficient directeur de (T), est égal à 2, le coefficient directeur de Δ.

$$\begin{aligned} f'(x) = 2 &\Leftrightarrow xe^{-x} + 2(1-e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Comme de plus $f(2) = (2-1)(2-e^{-2}) = 2 - e^{-2}$,

$$\boxed{A(2, 2-e^{-2}).}$$

b. Δ est la droite d'équation $-2x + y + 2 = 0$ et A est le point de coordonnées $(2, 2 - e^{-2})$. Donc la distance du point A à la droite Δ exprimée en unités de longueur vaut

$$\frac{|-2(2) + (2 - e^{-2}) + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}.$$

Comme l'unité de longueur est égale à 2 cm,

$$\boxed{d(A, \Delta) = \frac{2e^{-2}}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 0,121\ldots \text{cm.}}$$

EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On suppose que le dé indique 1. Le joueur a alors 10 tirages possibles dont 4 lui sont favorables. Donc, les différents tirages étant équiprobables (puisque le dé est équilibré), $p_{D_1}(G) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$$\boxed{p_{D_1}(G) = \frac{2}{5}.}$$

On suppose que le dé indique 2. Le joueur a alors $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ tirages possibles dont $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ lui sont favorables. Donc $p_{D_2}(G) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

$$\boxed{p_{D_2}(G) = \frac{2}{15}.}$$

On suppose que le dé indique 3. Le joueur a alors $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$ tirages possibles dont $\binom{4}{3} = 4$ lui sont favorables. Donc $p_{D_3}(G) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

$$\boxed{p_{D_3}(G) = \frac{1}{30}.}$$

b. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3) = p(D_1) \times p_{D_1}(G) + p(D_2) \times p_{D_2}(G) + p(D_3) \times p_{D_3}(G) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{15} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{30} = \frac{12 + 8 + 3}{180} = \frac{23}{180}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(G) = \frac{23}{180}.}$$

2. La probabilité demandée est $p_G(D_1)$. Or

$$p_G(D_1) = \frac{p(G \cap D_1)}{p(G)} = \frac{p(D_1) \times p_{D_1}(G)}{p(G)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}}{\frac{23}{180}} = \frac{180}{15 \times 23} = \frac{12}{23}.$$

$$\boxed{p_G(D_1) = \frac{12}{23}.}$$

3. Notons X le nombre de parties gagnées. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,
- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la partie est gagnée » avec une probabilité $p = \frac{23}{180}$ (d'après la question 1.b.) ou « la partie est perdue » avec une probabilité $1 - p = \frac{157}{180}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{23}{180}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{23}{180}\right)^2 \left(\frac{157}{180}\right)^4 = 0,14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Soit n le nombre de parties faites par le joueur. La probabilité de gagner au moins une partie est $p(X \geq 1)$ ou encore $1 - p(X = 0)$. Cette probabilité vaut $1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
p(X \geq 1) \geq 0,9 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0,1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{180}{157}\right)^n \geq 10 \text{ (par décroissance de la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{180}{157}\right) \geq \ln(10) \text{ (par croissance de la fonction logarithme népérien sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10)}{\ln\left(\frac{180}{157}\right)} \text{ (car } \ln\left(\frac{180}{157}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geq 16,8\ldots \Leftrightarrow n \geq 17.
\end{aligned}$$

A partir de 17 parties, la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure ou égale à $0,9$.

