# BACCALAUREAT GENERAL

## Session 2005

## MATHEMATIQUES

## - Série S -

## Enseignement de Spécialité

## Liban

---

**EXERCICE 1**

| | |
|---|---|
| **1.** | **Faux** |
| **2.** | **Faux** |
| **3.** | **Vrai** |
| **4.** | **Faux** |
| **5.** | **Vrai** |
| **6.** | **Vrai** |
| **7.** | **Faux** |
| **8.** | **Faux** |

### Explications.

**1.** Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \neq -\infty$.

**2.** Par exemple, si $f$ est la fonction $x \mapsto -x$ et $g$ est la fonction $x \mapsto e^x$, $f$ et $g$ sont définies sur $[0; +\infty[$, $g$ ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \neq -1$.

**3.** Pour tout réel $x > 0$, on a $0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et comme $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**4.** Pour tout réel $x \neq 0$, on pose $f(x) = 0$. $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f$ tend vers $0$ quand $x$ tend vers $0$. La droite d'équation $x = 0$ n'est donc pas asymptote à la courbe représentative de $f$.

**5.** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$, on a

$$f'(x) = (2x+3)e^x + (x^2+3x+1)e^x = (2x+3)e^x + f(x),$$

et donc, pour tout réel $x$, $f'(x) - f(x) = (2x+3)e^x$.

**6.** Le théorème du barycentre partiel permet d'écrire

$$G = \text{bar}\{A(3), B(-2), C(1)\} = \text{bar}\{I(3-2), C(1)\} = \text{bar}\{I(1), C(1)\},$$

ce qui montre que $G$ est le milieu du segment $[CI]$.

**7.** Pour tout point $M$ du plan, on a $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (3-2+1)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$ et donc $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 1 \Leftrightarrow 2\|\overrightarrow{MG}\| = 1 \Leftrightarrow MG = \dfrac{1}{2}$. L'ensemble considéré est le cercle de centre $G$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

**8.** Pour tout point $M$ du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si $M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

 

**EXERCICE 2**

**1.** L'énoncé donne directement $p(T_1) = 0,7$. Notons $T_2$ l'événement « le second test est positif ». L'événement $C$ est réalisé si et seulement si l'événement $T_1$ est réalisé ou bien l'événement $T_1$ n'est pas réalisé et dans ce cas l'événement $T_2$ est réalisé. Donc

$$p(C) = p(T_1) + p(\overline{T_1} \cap T_2) = p(T_1) + p(\overline{T_1}).p_{\overline{T_1}}(T_2) = 0,7 + 0,3 \times 0,65 = 0,7 + 0,195 = 0,895.$$

$$\boxed{p(T_1) = 0,7 \text{ et } p(C) = 0,895.}$$

**2. a.** La variable aléatoire $X$ prend trois valeurs : $x_1 = a - 1000$ (correspondant au cas où le premier test est positif), $x_2 = a - 1050$ (correspondant au cas où le premier test est négatif et le deuxième est positif) et $x_3 = -1050$ (correspondant au cas où les deux tests sont négatifs).

| $x_i$ | $a - 1000$ | $a - 1050$ | $-1050$ |
|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $0,7$ | $0,195$ | $0,105$ |

$(p(X = -1050) = 1 - 0,7 - 0,195 = 0,105)$

**b.** L'espérance de $X$ est

$$E(X) = 0,7(a - 1000) + 0,195(a - 1050) - 0,105(1050) = 0,895a - 1015.$$

$$\boxed{E(X) = 0,895a - 1015.}$$

**c.** L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices quand l'espérance $E(X)$ est strictement positive. Or

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow 0,895a - 1015 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1015}{0,895} \Leftrightarrow a > 1134,\ldots.$$

$$\boxed{\text{L'entreprise peut espérer réaliser des bénéfices si le prix de vente de l'écran est supérieur ou égal à } 1135 \text{ euros.}}$$

 

**EXERCICE 3**

**Partie A**

**1.** La fonction $f$ est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$. De plus, pour tout réel $t$ de $[0;1]$, on a

$$f'(t) = (-1)e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t).$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0;1].}$$

On en déduit que

$$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t \, dt = \int_0^1 g(t) \, dt = [f(t)]_0^1 = \left[(2-t)e^t\right]_0^1 = (2-1)e^1 - (2-0)e^0 = e-2.$$

$$\boxed{u_1 = e-2.}$$

**2.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour $t \in [0;1]$, posons $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$. Les deux fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0;1]$ et pour tout réel $t$ de $[0;1]$, on a $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $v'(t) = e^t$. De plus, les deux fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0;1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t \, dt = \left[(1-t)^{n+1}e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(n+1)(1-t)^n\right) e^t \, dt \\ &= (1-1)^{n+1}e^1 - (1-0)^{n+1}e^0 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= -1 + (n+1)u_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.}$$

**Partie B**

Pour la première calculatrice, il semblerait que la suite $(u_n)$ soit décroissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Pour la deuxième calculatrice, il semblerait que la suite $(u_n)$ soit tout d'abord décroissante puis croissante à partir du rang 14 et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**Partie C**

**1.** Soit $n$ un entier naturel non nul. Pour tout réel $t$ de $[0;1]$, on a $1-t \geq 0$ et donc $(1-t)^n \geq 0$ puis $(1-t)^n e^t \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \geq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \geq 0.}$$

**2. a.** Soient $n$ un entier naturel non nul et $t$ un réel de $[0;1]$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^t \leq e^1 = e$. Mais alors, puisque $(1-t)^n \geq 0$, on a $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$.

**b.** Mais alors, par croissance de l'intégrale on a

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt \\ &\leq \int_0^1 e(1-t)^n \, dt = e\int_0^1 (1-t)^n \, dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= e\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = e\left(-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{e}{n+1}. \end{aligned}$$

 

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul, } 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}.}$$

**3.** Puisque $\frac{e}{n+1}$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $(u_n)$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

**Partie D**

**1.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$, $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$.

- Pour $n = 1$, d'après la question A.1., on a $u_1 + (1!)(a + 2 - e) = e - 2 + a + 2 - e = a = v_1$. L'égalité ci-dessus est donc vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$. Alors

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= (n+1)v_n - 1 \\
&= (n+1)\left(u_n + (n!)(a + 2 - e)\right) - 1 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)u_n - 1 + (n+1).n!(a + 2 - e) \\
&= u_{n+1} + (n+1)!(a + 2 - e) \text{ (d'après la question A.2.).}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e).}$$

**2.** D'après la question C.3., on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'autre part, si $a > e-2$ alors $a+2-e > 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(n!)(a+2-e) = +\infty$ et si $a < e - 2$ alors $a + 2 - e < 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(n!)(a + 2 - e) = -\infty$. Enfin, si $a = e - 2$, la suite $v$ est la suite $u$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > e - 2 \\ 0 \text{ si } a = e - 2 \\ -\infty \text{ si } a < e - 2 \end{cases}.}$$

**3.** La première calculatrice prend pour $a$ une valeur approchée par défaut de $e - 2$ et différente de $e - 2$ et la deuxième prend pour $a$ une valeur approchée par excès de $e - 2$ et différente de $e - 2$. Il est donc normal que la suite semble tendre vers $-\infty$ dans le premier cas et vers $+\infty$ dans le deuxième.

Il faut noter qu'aucune calculatrice n'est capable de fournir le bon résultat car toute calculatrice ne travaille qu'avec des valeurs approchées de $e - 2$ différentes de $e - 2$.

 

**EXERCICE 4**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1. a.** $109$ est un nombre premier et $109$ ne divise pas $226$. Donc le pgcd de $109$ et $226$ est $1$. D'après le théorème de Bézout, on sait que l'équation $(E)$ admet au moins un couple solution.

**b.** $109 \times 141 - 226 \times 68 = 15369 - 15368 = 1$. Donc le couple $(141, 68)$ est un couple solution de l'équation $(E)$.
Soit alors $(x, y)$ un couple d'entiers relatifs quelconque.

$$\begin{aligned}(x, y) \text{ est solution de l'équation } (E) &\Leftrightarrow 109x - 226y = 1 \Leftrightarrow 109x - 226y = 109 \times 141 - 226 \times 68 \\ &\Leftrightarrow 109(x - 141) = 226(y - 68) \ (*).\end{aligned}$$

L'entier $226$ divise l'entier $226(y - 68)$ et donc nécessairement, d'après l'égalité $(*)$, $226$ divise $109(x - 141)$. Comme de plus, d'après la question a., les entiers $226$ et $109$ sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que $226$ divise $x - 141$ ou encore il existe un entier relatif $k$ tel que $x - 141 = 226k$. De même, il existe un entier relatif $k'$ tel que $y - 68 = 109k'$. En résumé, un couple solution de $(E)$ est nécessairement de la forme $(141 + 226k, 68 + 109k')$ où $k$ et $k'$ sont deux entiers relatifs.

Réciproquement, soient $k$ et $k'$ deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned}(141 + 226k, 68 + 109k') \text{ est solution de l'équation } (E) &\Leftrightarrow 109(141 + 226k) - 226(68 + 109k') = 1 \\ &\Leftrightarrow 109 \times 141 - 226 \times 68 + 226 \times 109(k - k') = 1 \\ &\Leftrightarrow 226 \times 109(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation } (E) \text{ sont les couples de la forme } (141 + 226k, 68 + 109k),\ k \in \mathbb{Z}.}$

Soit $k$ un entier relatif.

$$1 \leq 141 + 226k \leq 226 \Leftrightarrow -140 \leq 226k \leq 86 \Leftrightarrow -\frac{140}{226} \leq k \leq \frac{86}{226} \Leftrightarrow k = 0,$$

car $k$ est un entier relatif et $\left[-\frac{140}{226}, \frac{86}{226}\right] \subset ]-1, 1[$. Ainsi, il existe un et un seul couple $(x, y)$ solution tel que de plus $1 \leq x \leq 226$. C'est le couple obtenu pour $k = 0$. Enfin, quand $k = 0$, on obtient $x = 141$ et $y = 68$ et $y$ est bien un entier naturel.

$\boxed{d = 141 \text{ et } e = 68.}$

**2.** Pour montrer que le nombre 227 est un nombre premier, il suffit de vérifier que 227 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée. Or $\sqrt{227} = 15, \ldots$ et les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{227}$ sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Les critères usuels de divisibilité montrent que 227 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 et la machine nous permet d'affirmer que 227 n'est divisible ni par 7, ni par 11, ni par 13. Donc

$\boxed{\text{227 est un nombre premier.}}$

**3. a.** $f(0)$ est le reste de la division euclidienne de $0^{109}$ par 227 et donc $f(0) = 0$. Puis $g(f(0)) = g(0)$ est le reste de la division euclidienne de $0^{141}$ par 227. Donc

$\boxed{g(f(0)) = 0.}$

**b.** Soit $a$ un entier naturel tel que $1 \leq a \leq 226$. Donc 227 ne divise pas $a$. D'autre part, d'après la question 2., 227 est un nombre premier. Mais alors, d'après le petit théorème de Fermat rappelé par l'énoncé, $a^{227-1} \equiv 1$ (modulo 227).

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } a \text{ tel que } 1 \leq a \leq 226,\ a^{226} \equiv 1 \text{ (modulo 227).}}$

 

**c.** Soit $a$ un entier naturel tel que $1 \leq a \leq 226$. Par définition, $f(a) \equiv a^{109}$ (modulo 227) et donc

$$(f(a))^{141} \equiv (a^{109})^{141} \text{ (modulo 227)}.$$

D'après la question 1.b., on a $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$ et donc $(a^{109})^{141} = a^{109\times 141} = a^{1+226\times 68} = a.(a^{226})^{68} \equiv a.1^{68}$ (modulo 227) ou encore $(a^{109})^{141} \equiv a$ (modulo 227). On a montré que $(f(a))^{141} \equiv a$ (modulo 227) ou encore que

$$g(f(a)) \equiv a \text{ (modulo 227)}.$$

Maintenant, $g(f(a))$ est un entier compris entre $1$ et $226$ et il existe un et un seul entier compris entre $1$ et $226$, congru à $a$ modulo 227 à savoir $a$ lui-même. Finalement $g(f(a)) = a$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } a \text{ tel que } 1 \leq a \leq 226,\ g(f(a)) = a.}$$

De même, $g(a) \equiv a^{141}$ (modulo 227) et donc $(g(a))^{109} \equiv (a^{141})^{109}$ (modulo 227) puis $(g(a))^{109} \equiv a$ (modulo 227) et donc

$$f(g(a)) \equiv a \text{ (modulo 227)}.$$

Enfin, comme précédemment $f(g(a))$ est un entier entre $1$ et $226$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } a \text{ tel que } 1 \leq a \leq 226,\ f(g(a)) = a.}$$

 