BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Polynésie

EXERCICE 1

1. La probabilité demandée est $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.
L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,1$. Puisque les événements A et B sont indépendants, on sait que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants et donc

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B}) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = 0,98 \times 0,9 = 0,882.$$

$$\boxed{p(C) = 0,882.}$$

2. Une montre choisie au hasard peut
- ou bien ne présenter aucun défaut (événement C)
- ou bien présenter un et un seul des deux défauts (événement D)
- ou bien présenter les deux défauts (événement $A \cap B$),

ces trois événements étant deux à deux disjoints. D'après la formule des probabilités totales, on a $p(C)+p(D)+p(A\cap B) = 1$ et donc, puisque les événements A et B sont indépendants,

$$p(D) = 1 - p(C) - p(A \cap B) = 1 - p(C) - p(A)p(B) = 1 - 0,882 - 0,02 \times 0,1 = 1 - 0,884 = 0,116.$$

$$\boxed{p(D) = 0,116.}$$

3. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la montre ne présente aucun défaut » avec une probabilité $p = p(C) = 0,882$ (d'après 1.) ou « la montre présente au moins un des deux défauts » avec une probabilité $1 - p = 0,118$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,882$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 4)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geq 4) &= p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4}(0,882)^4(0,118)^1 + \binom{5}{5}(0,882)^5(0,118)^0 = 5.(0,882)^4.0,118 + (0,882)^5 \\ &= 0,891 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(E) = 0,891 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_1 = 5u_0 - 6 = 5 \times 14 - 6 = 64$, puis $u_2 = 5 \times 64 - 6 = 314$ puis $u_3 = 5 \times 314 - 6 = 1564$ et enfin $u_4 = 5 \times 1564 - 6 = 7814$.

$$\boxed{u_1 = 64,\ u_2 = 314,\ u_3 = 1564 \text{ et } u_4 = 7814.}$$

Il semblerait alors que les deux derniers chiffres de u_n soient 14 quand n est pair et 64 quand n est impair.
2. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = u_n + 24u_n - 36 = u_n + 4(6u_n - 9).$$

Comme $4(6u_n - 9)$ est un entier multiple de 4, on a montré que $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4).
- Quand $k = 0$, on a $u_{2k} = u_0 = 14 = 2 + 4 \times 3$ et donc $u_0 \equiv 2$ (modulo 4).
- Soit k un entier naturel. Supposons que $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4). D'après ce qui précède, on a $u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \equiv u_{2k}$ (modulo 4) et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{2(k+1)} \equiv 2$ (modulo 4).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ u_{2k} \equiv 2 \text{ (modulo 4).}}$$

Soit k un entier naturel. On a $u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6$ et donc $u_{2k+1} \equiv 5 \times 2 - 6$ (modulo 4) ou encore $u_{2k+1} \equiv 4$ (modulo 4) ou enfin $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ u_{2k+1} \equiv 0 \text{ (modulo 4).}}$$

a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
- Quand $n = 0$, $5^{n+2} + 3 = 5^2 + 3 = 28 = 2 \times 14 = 2u_0$ et l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Alors

$$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 = 5 \times 5^{n+2} + 15 - 12 = 5^{(n+1)+2} + 3.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 2u_n = 5^{n+2} + 3.}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $5^{n+2} + 3 \equiv 28$ (modulo 100).
- Quand $n = 0$, $5^{n+2} + 3 = 5^2 + 3 = 28$ et la congruence à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que $5^{n+2} + 3 \equiv 28$ (modulo 100). Il existe donc un entier naturel k tel que $5^{n+2} + 3 = 28 + 100k$. On a alors $5^{n+2} = 25 + 100k$ puis

$$\begin{aligned} 5^{(n+1)+2} + 3 &= 5.5^{n+2} + 3 \\ &= 5(25 + 100k) + 3 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 5 \times 100k + 128 = 28 + 100(5k) + 100 = 28 + 100(5k + 1), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $2u_{n+1} \equiv 28$ (modulo 100).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n\ 2u_n \equiv 28 \text{ (modulo 100).}}$$

3. Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, il existe un entier naturel k tel que $2u_n = 28 + 100k$ ou encore $u_n = 14 + 50k$.

Si k est pair, on peut poser $k = 2k'$ où k' est un entier naturel, et on obtient $u_n = 14 + 100k'$ ce qui signifie que les deux derniers chiffres de u_n sont 14 et si k est impair, on peut poser $k = 2k' + 1$ où k' est un entier naturel, et on obtient $u_n = 64 + 100k'$ ce qui signifie que les deux derniers chiffres de u_n sont 64. En résumé, les deux derniers chiffres de u_n sont soit 14 soit 64 ou encore u_n est congru soit à 14 soit à 64 modulo 100.

Maintenant, le début de la question 2. montre que quand n est pair, $u_n \equiv 2$ (modulo 4) et comme d'autre part, $14+100k' \equiv 2$ (modulo 4), le cas où les deux derniers chiffres de u_n sont 14 est le cas où n est pair.
De même, quand n est impair, $u_n \equiv 0$ (modulo 4) et comme $64+100k' \equiv 0$ (modulo 4), le cas où les deux derniers chiffres de u_n sont 64 est le cas où n est impair.
On a montré que

> Si n est pair, les deux derniers chiffres de u_n sont 14.
> Si n est impair, les deux derniers chiffres de u_n sont 64.

4. Soit n un entier naturel. Notons d le PGCD de u_n et u_{n+1}.
Puisque d divise u_n et d divise u_{n+1}, d divise encore $5u_n - u_{n+1} = 6$. Donc $d \in \{1, 2, 3, 6\}$. Plus précisément, d'après le début de la question 2., u_n et u_{n+1} sont des nombres pairs et donc $d \in \{2, 6\}$.

Montrons alors que u_n n'est pas divisible par le nombre premier 3. D'après la question 2.a., on a $2u_n = 5^{n+2} + 3$. En passant aux congruences modulo 3, on obtient $-u_n \equiv (-1)^{n+2}$ (modulo 3). Ainsi, on a $u_n \equiv 1$ (modulo 3) ou $u_n \equiv -1$ (modulo 3). En particulier, on a $u_n \not\equiv 0$ (modulo 3) ce qui signifie que le nombre premier 3 n'est pas un facteur premier de u_n. Mais alors u_n n'est pas divisible par 6. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \wedge u_{n+1} = 2.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1. a. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b. f est somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ et donc

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

2. a. Soit n un entier naturel.
Tout d'abord, f est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
f est donc continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On sait alors que pour tout réel k, l'équation $f(x) = f$ admet une et une seule solution. En particulier, il existe un réel α_n et un seul tel que $f(\alpha_n) = n$.

b. Voir graphique page suivante.

c. Puisque $1 + \ln(1) = 1$, on a $\alpha_1 = 1$.

d. Soit n un entier naturel. Par définition, on a $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$. Donc, $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$. Puisque f est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.
On a montré que pour tout entier naturel n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. a. On a $f(1) = 1 + \ln(1) = 1$. Puis pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et donc $f'(1) = 1 + 1 = 2$.
Une équation de la tangente à la courbe (Γ) est $y - 1 = 2(x - 1)$ ou encore $y = 2x - 1$.

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente à } (\Gamma) \text{ au point d'abscisse } 1 \text{ est } y = 2x + 1.}$$

b. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}.$$

Ainsi, si $x \in]0, 1[$, $h'(x) > 0$ et si $x \in]1, +\infty[$, $h'(x) < 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. La fonction h admet donc un maximum en 1. Or $h(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$.
On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est négative sur }]0, +\infty[.}$$

Soit x un réel strictement positif. On a

$$f(x) - (2x - 1) = x + \ln(x) - 2x + 1 = \ln(x) - x + 1 = h(x).$$

D'après ce qui précède, pour tout réel x strictement positif, on a $h(x) \leq 0$ et donc $f(x) \leq 2x - 1$. On en déduit que

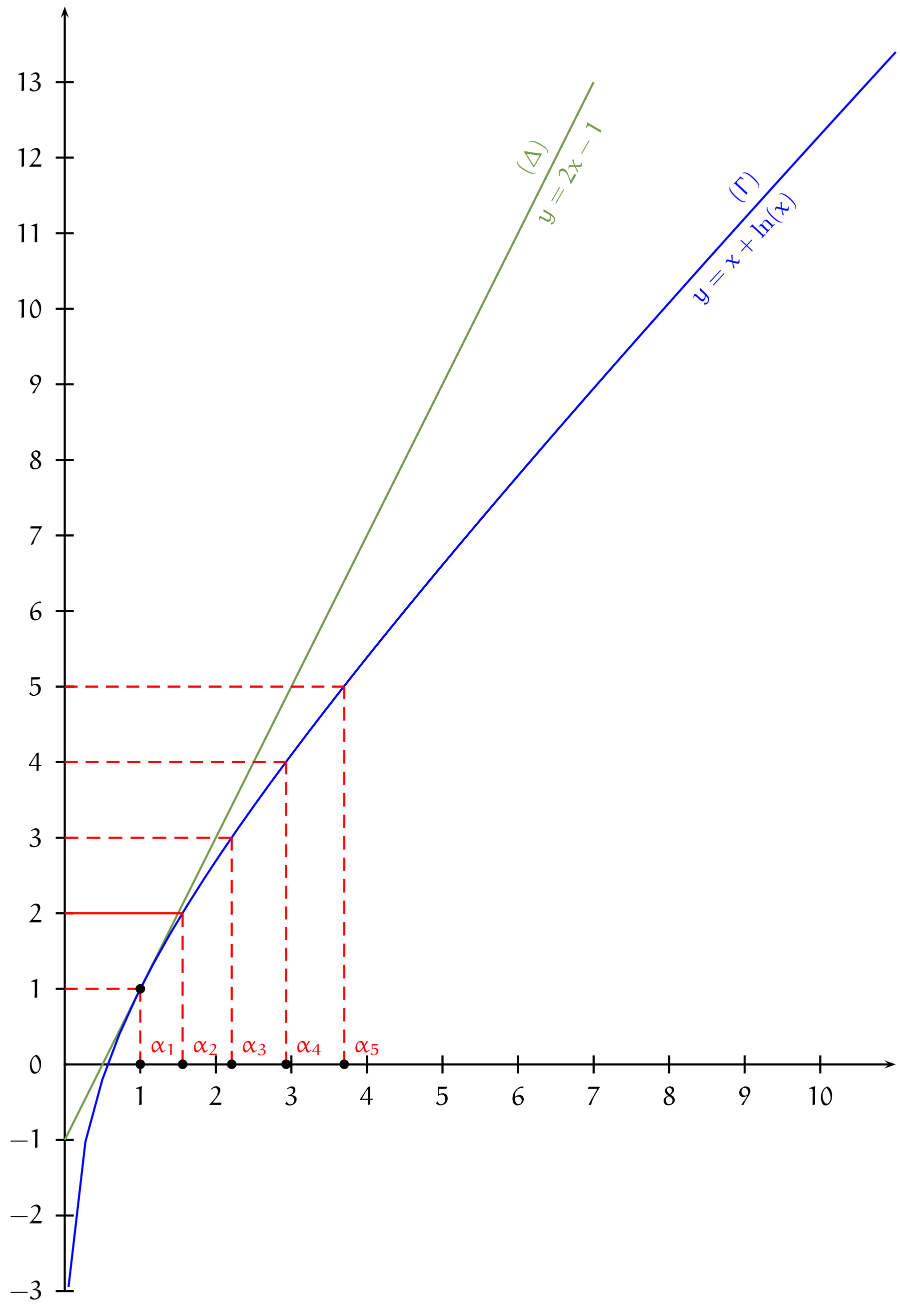
$$\boxed{(\Gamma) \text{ est au-dessous de } (\Delta) \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

c. Soit n un entier naturel. D'après la question b., on a $f(\alpha_n) \leq 2\alpha_n - 1$ ce qui s'écrit $n \leq 2\alpha_n - 1$ ou encore $\dfrac{n + 1}{2} \leq \alpha_n$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \ \frac{n + 1}{2} \leq \alpha_n.}$$

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty.}$$



Partie B

1. *Démonstration de cours.*

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Montrons que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit A un réel. Puisque la suite (u_n) n'est pas majorée, A n'est pas un majorant de la suite (u_n) et donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Puisque la suite (u_n) est croissante, à partir du rang n_0, on a $u_n \geq u_{n_0}$ et donc $u_n > A$. On a montré que pour tout réel A, tous les termes de la suite (u_n) sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. On admet que la suite (β_n) est strictement croissante. Montrons que la suite (β_n) n'est pas majorée.

Soient A un réel puis $n_0 = \begin{cases} E(g(A)) + 1 \text{ si } g(A) \geq 0 \\ 0 \text{ si } g(A) < 0 \end{cases}$. Dans tous les cas, n_0 est un entier naturel et $n_0 > g(A)$ ou encore $g(\beta_{n_0}) > g(A)$. Puisque g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\beta_{n_0} > A$, ce qui montre que A n'est pas un majorant de la suite (β_n).

Ainsi, aucun réel ne majore la suite (β_n) ou encore la suite (β_n) n'est pas majorée.
En résumé, la suite (β_n) est une suite croissante et non majorée et donc d'après la question précédente,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty.}$$

EXERCICE 4

1. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$.
Soit z un nombre complexe.

$$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2 + 2z + 2^2) = (z-2)(z^2 + 2z + 4).$$

Par suite,

$$z^3 = 8 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 4 = 0.$$

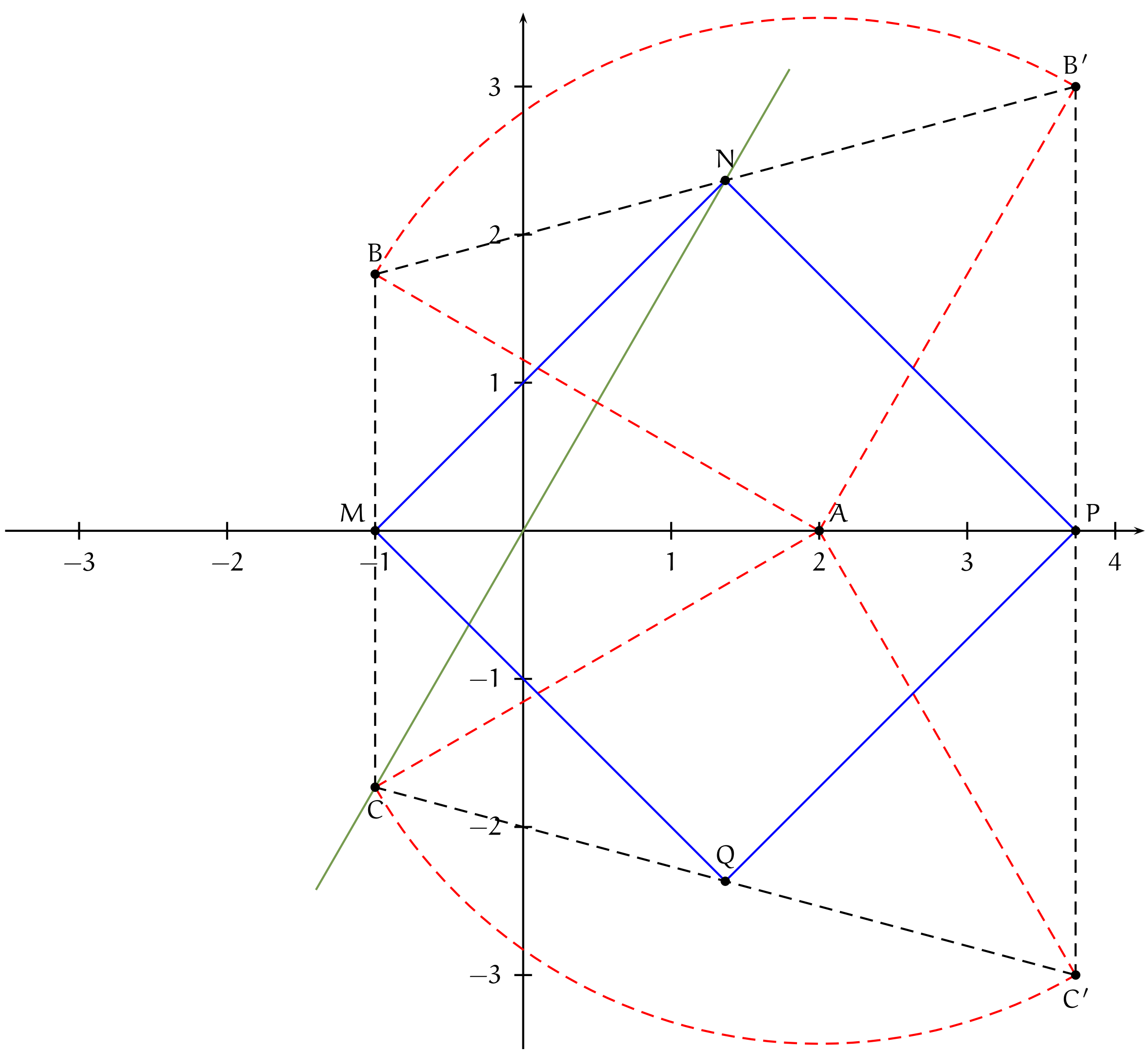
Calculons le discriminant de l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ $(*)$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (2i\sqrt{3})^2.$$

On en déduit que l'équation $(*)$ admet deux solutions non réelles conjuguées : $z_1 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = \overline{z_1} = -1 - i\sqrt{3}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}.}$$

2. a.



b. Soient Ω un point dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Donc

$$b' = e^{-i\pi/2}(b-a)+a = -i((-1+i\sqrt{3})-2)+2 = -i(-3+i\sqrt{3})+2 = 2+\sqrt{3}+3i.$$

$$\boxed{b' = 2+\sqrt{3}+3i.}$$

c. On note que $\overline{a} = a$ et que $\overline{b} = c$. Par suite,

$$c' = e^{i\pi/2}(c-a)+a = i(c-a)+a = \overline{(-i(b-a)+a)} = \overline{b'}.$$

$$\boxed{c' = \overline{b'} = 2+\sqrt{3}-3i.}$$

3. a.

$$n = \frac{1}{2}(b+b') = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i) = \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3})+i\sqrt{3}(1+\sqrt{3})\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

$$\boxed{n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}).}$$

On remarque alors que $n = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}c$ ce qui s'écrit encore $\overrightarrow{ON} = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points O, N et C sont alignés.}}$$

b. D'après la question 2.c., on a $c' = \overline{b'}$ et donc

$$q = \frac{1}{2}(c+c') = \frac{1}{2}(\overline{b}+\overline{b'}) = \overline{\frac{1}{2}(b+b')} = \overline{n}.$$

Mais alors

$$i(q+1) = i(\overline{n}+1) = i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})+1\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(i+\sqrt{3})+i = \frac{(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2}.$$

et d'autre part

$$n+1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})+1 = \frac{(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2}.$$

Finalement,

$$\boxed{n+1 = i(q+1).}$$

Comme $m = -1$, l'égalité précédente s'écrit encore $q-m = e^{i\pi/2}(n-m)$ et signifie que Q est l'image de N par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.

$$\boxed{\text{Le triangle MNQ est rectangle isocèle en M.}}$$

c. M et N sont les milieux respectifs des côtés [CB] et [BB$'$] du triangle CBB$'$. Donc la droite (MN) est parallèle à la droite (CB'). De même, la droite (PQ) est parallèle à la droite (CB'). On en déduit alors que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.
De même, les droites (MQ) et (PN) sont parallèles. Finalement, le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

D'après la question précédente, on a de plus $MN = MQ$ et $(MN)\perp(MQ)$. Finalement, le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère MNPQ est un carré.}}$$

