BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

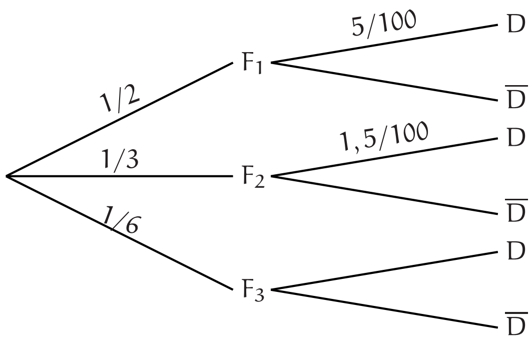
Asie

EXERCICE 1

1) a) L'énoncé donne $p(F_1) = \frac{1}{2}$, $p(F_2) = \frac{1}{3}$ et $p(F_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

D'autre part, $p_{F_1}(D) = \frac{5}{100}$, $p_{F_2}(D) = \frac{1,5}{100}$ et $p(D) = \frac{3,5}{100}$.

Traduisons alors la situation par un arbre.



b) La probabilité demandée est $p(F_1 \cap D)$.

$$p(F_1 \cap D) = p(F_1) \times p_{F_1}(D) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{100} = \frac{2,5}{100}.$$

$$\boxed{p(F_1 \cap D) = 0,025.}$$

c)

$$p(F_2 \cap D) = p(F_2) \times p_{F_2}(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1,5}{100} = \frac{0,5}{100}.$$

$$\boxed{p(F_2 \cap D) = 0,005.}$$

d) D'après la formule des probabilités totales, $p(F_1 \cap D) + p(F_2 \cap D) + p(F_3 \cap D) = p(D)$ et donc

$$p(F_3 \cap D) = p(D) - p(F_1 \cap D) - p(F_2 \cap D) = 0,035 - 0,025 - 0,005 = 0,005.$$

$$\boxed{p(F_3 \cap D) = 0,005.}$$

e) La probabilité demandée est $p_{F_3}(D)$.

$$p_{F_3}(D) = \frac{p(F_3 \cap D)}{p(F_3)} = \frac{0,005}{1/6} = 0,03.$$

$$\boxed{p_{F_3}(D) = 0,03.}$$

2) a) Notons X le nombre de paires de chaussettes qui présentent un défaut. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 6 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la chaussette présente un défaut » avec une probabilité $p = \frac{3,5}{100}$ et « la chaussette ne présente pas de défaut » avec une probabilité $1 - p = \frac{96,5}{100}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3,5}{100}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{3,5}{100}\right)^2 \left(\frac{96,5}{100}\right)^4 = 0,016 \text{ arrondi au millième.}$$

b) La probabilité demandée est $p(X \leqslant 1)$ et on a

$$p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \left(\frac{96,5}{100}\right)^6 + \binom{6}{1} \times 0,035^1 \times 0,965^5 = 0,983 \text{ arrondi au millième.}$$

EXERCICE 2

1) Les points C et D sont les points de coordonnées respectives $(1, -1)$ et $(0, -1)$ et donc $c = 1 - i$ et $d = -i$.

2) a) L'écriture complexe de r est $z' - 0 = e^{i\pi/2}(z - 0)$ ou encore $z' = iz$.

b) Puisque le quadrilatère $OBEF$ est un carré direct, $F = r(B)$ et donc $f = ib$.

c) Le carré $OBEF$ est en particulier un parallélogramme et donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$ puis $e = b + f = b + ib = (1 + i)b$.

$$\boxed{e = (1 + i)b.}$$

3) De même, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$ et donc $g = f + d = ib - i = i(b - 1)$.

$$\boxed{g = i(b - 1).}$$

4) $\dfrac{e - g}{c - g} = \dfrac{(1 + i)b - i(b - 1)}{1 - i - i(b - 1)} = \dfrac{b + i}{1 - ib} = \dfrac{i(1 - ib)}{1 - ib} = i.$

$$\boxed{\frac{e - g}{c - g} = i.}$$

1ère solution. On en déduit que $GE = |e - g| = |i(c - g)| = |i| \times |c - g| = 1 \times GC = GC$ et donc le triangle EGC est isocèle en G. On en déduit aussi que $\left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}\right) = \arg\left(\dfrac{e - g}{c - g}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et donc le triangle EGC est rectangle en G.

2ème solution. L'égalité $\dfrac{e - g}{c - g} = i$ s'écrit encore $e - g = e^{i\pi/2}(c - g)$ et signifie que le point E est l'image du point C par la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Ceci démontre de nouveau que le triangle EGC est rectangle en G.

$$\boxed{\text{Le triangle } EGC \text{ est rectangle et isocèle en } C.}$$

EXERCICE 3

PARTIE A Existence et unicité de la solution

1) La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

2) D'autre part, la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $]0,+\infty[$. Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Finalement, pour tout réel k de $]-\infty,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ et en particulier, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

3) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0,1\ldots \leqslant 0$ et $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 \geqslant 0$. Donc, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(0) \leqslant f(1)$ et puisque la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$,

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.}$$

PARTIE B Encadrement de la solution α

1) Etude de quelques propriétés de la fonction g

a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{4x-1}{5x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $5x > 0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $4x - 1$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.

b) Puisque $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \subset \left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$, la fonction g est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Par suite, pour tout réel x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.

La calculatrice fournit $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,538 \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $g(1) = 0,8 \leqslant 1$. Donc, pour tout réel x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$ ou encore, pour tout réel x de $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $g(x)$ appartient à $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

c) Soit x un réel de $]0,+\infty[$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{4x - \ln(x)}{5} = x \Leftrightarrow 4x - \ln(x) = 5x \Leftrightarrow 5x - 4x + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \text{ solution de } (E).$$

Donc, un nombre x de $]0,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

• Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = \dfrac{1}{2}$ et donc d'après la question B-1)b), $\dfrac{1}{2} \leqslant g(u_0) \leqslant 1$ ou encore $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Puisque la fonction g est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ d'après la question B-1)a), on en déduit que $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1})$ ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

D'autre part, d'après la question B-1)b), puisque u_n et u_{n+1} sont deux réels de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, il en est de même de u_{n+1} et $u_{n+2} = g(u_{n+1})$. Ceci montre que $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

b) D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Puisque la fonction g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et en particulier en ℓ, on en déduit que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = g(\ell).$$

Ainsi, le réel ℓ est un réel strictement positif solution de l'équation $g(x) = x$. D'après la question B-1)c), ℓ est encore solution de (E) et donc $\ell = \alpha$ car α est l'unique solution strictement positive de l'équation (E) d'après la question A-2).

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

3) Recherche d'une valeur approchée de α

a) La calculatrice fournit

n	u_n
0	$0,5$
1	$0,5386294...$
2	$0,5546490...$
3	$0,5616031...$
4	$0,5646744...$
5	$0,5660407...$
6	$0,5666504...$
7	$0,5669228...$
8	$0,5670447...$
9	$0,5670991...$
10	$0,56712356...$

et donc

$$\boxed{u_{10} = 0,567124 \text{ arrondi à la sixième décimale.}}$$

b) $u_{10} \leqslant \alpha \leqslant u_{10} + 0,0005$. Mais $u_{10} \geqslant 0,567$ et $u_{10} + 0,0005 \leqslant 0,56712356... + 0,0005 = 0,56762356... \leqslant 0,568$. Donc

$$\boxed{0,567 \leqslant \alpha \leqslant 0,568.}$$

EXERCICE 4

1) Réponse (1)

2) Réponse (3)

3) Réponse (3)

4) Réponse (2)

Justifications.

1) Soient a et b deux réels, a étant non nul. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.
Ici, $a = -2$ et $b = 6$ et donc les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$ ce qui élimine les réponses (2) et (3). De plus, la condition $f(0) = 1$ équivaut à $C + 3 = 1$ ou encore $C = -2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ ce qui confirme que la réponse (1) est exacte.

2) I est le barycentre du système $\{(B; 2); (C; 1)\}$. Le théorème du barycentre partiel permet d'affirmer que $\text{bar}\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\} = \text{bar}\{(A; 1); (I; 3)\}$. Ainsi, le barycentre du système $\{(A; 1); (B; 2); (C; 1)\}$ est sur la droite (AI) et la bonne réponse est la réponse (3).

3) $x_{H_1} - 3y_{H_1} + 2z_{H_1} = 3 + 3 + 8 = 14 \neq 5$. Le point H_1 n'appartient pas à $\mathscr{P}$ et la réponse (1) est fausse.
$x_{H_2} - 3y_{H_2} + 2z_{H_2} = 4 + 9 - 8 = 5$ et $x_{H_3} - 3y_{H_3} + 2z_{H_3} = 3 + 2 = 5$. Les points H_2 et H_3 appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_2}$ a pour coordonnées $(2, -6, -3)$ et le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ a pour coordonnées $(1, -3, 2)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH_3}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ et donc le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point H_3.

4) La valeur moyenne considérée est $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.
Puisque f est une fonction positive sur $[0, 1]$, I est un nombre positif et la réponse (1) est fausse. Ensuite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ et donc d'après l'inégalité de la moyenne, $I \leqslant \displaystyle\int_0^1 1\,dx \leqslant 1 \times (1 - 0) = 1$. Comme $\dfrac{\pi}{2} > 1$, la réponse (3) est fausse. La bonne réponse est donc nécessairement la réponse (2).

On ne sait calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ qu'au cours de la première année d'études supérieures.

