BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Réunion

EXERCICE 1

1) **c.**

2) **d.**

3) **c.**

4) **a.**

Explications.

1) On sait que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = \omega + Re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, (où R est un réel strictement positif et ω est un nombre complexe) est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R. Ici, $\omega = 1 - 2i$ et $R = 1$. La bonne réponse est donc la réponse c.

2) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$. On sait alors que f est une rotation. L'angle de f est $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
Le centre de f est son point invariant. Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z = z' &\Leftrightarrow z = -iz - 2i \Leftrightarrow (1+i)z = -2i \Leftrightarrow z = \frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-2i-2}{1^2+1^2} \\ &\Leftrightarrow z = -1 - i. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse d. On peut noter que si $z = -1 - 2i$, $z' = -i(-1-2i) - 2i = i - 2 - 2i = -2 - i \neq i$.

3) Soit M un point du plan d'affixe z.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z + 1 + 2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_C| \Leftrightarrow AM = CM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AC].$$

La bonne réponse est la réponse c.

4) Si z est un nombre réel, alors $z + |z|^2$ est un nombre réel et puisque $7 + i \notin \mathbb{R}$, on ne peut avoir $z + |z|^2 = 7 + i$. La réponse b. est fausse. Ensuite, la partie imaginaire de $z + |z|^2$ est celle de z. Cette partie imaginaire doit être égale à celle de $7 + i$ c'est-à-dire 1. Donc les réponses c. et d. sont fausses. Il ne reste que la réponse a. Vérifions-le.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + iy = 7 + i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 7 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4(-6) = 25$. Cette équation admet les deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. L'ensemble des solutions de l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ est $\{2 + i, -3 + i\}$. La réponse a. est donc effectivement correcte.

EXERCICE 2

PARTIE A

1) Il semble que la fonction f soit strictement croissante sur $[0,1]$ puis strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. D'autre part, il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif x,

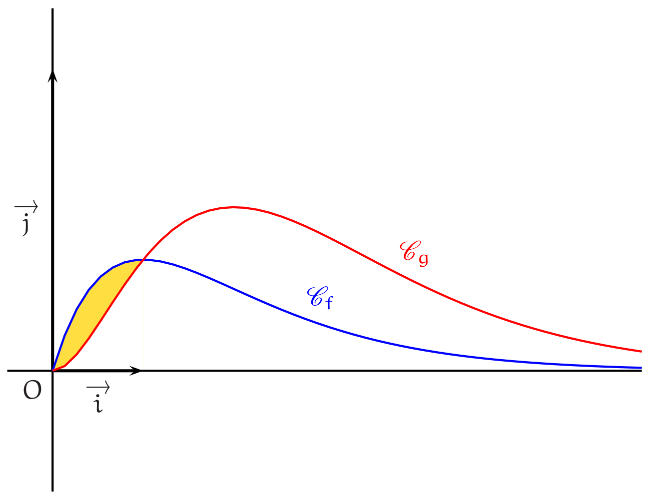
$$f'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $[0,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$ puis que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel positif x, $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

Les conjectures émises à la question 1) sont donc validées.

3) La calculatrice permet de construire le graphique suivant :



4) Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$, strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$ et enfin il semble que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 1. Démontrons-le.

Soit x un réel positif.

$$g(x) - f(x) = x^2e^{-x} - xe^{-x} = x(x-1)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $g(x)-f(x)$ est du signe de $x(x-1)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-f(x)$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 0 et 1. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

$\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

PARTIE B

1) Voir graphique.

2) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})\,dx = -e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 1 - \frac{2}{e}.}$$

3) a) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= -(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x)(-e^{-x}) = -(2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x} = (-2x - 2 + x^2 + 2x)e^{-x} \\ &= (x^2 - 2)e^{-x}.\end{aligned}$$

b) Pour $x \geqslant 0$, posons $G(x) = H(x) - 2e^{-x}$. G est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$G'(x) = H'(x) + 2e^{-x} = (x^2 - 2)e^{-x} + 2e^{-x} = x^2e^{-x} = g(x).$$

Une primitive de la fonction g sur $[0, +\infty[$ est donc la fonction $G\ :\ x \mapsto H(x) - 2e^{-x} = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0, +\infty[\text{ est donc la fonction } G\ :\ x \mapsto -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}.}$$

4) D'après la question A.4., la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[0, 1]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - (G(1) - G(0)) \\ &= \left(1 - \frac{2}{e}\right) - \left(-(1^2 + 2 + 2)e^{-1} + 2e^0\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - \left(2 - \frac{5}{e}\right) = \frac{3}{e} - 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{3}{e} - 1.}$$

EXERCICE 3

1) a) La probabilité demandée est $p\,(A \cap B)$. Puisque les événements A et B sont indépendants,

$$p\,(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002.$$

$$\boxed{p(C) = 0,0002.}$$

b) L'événement « le sac est défectueux » est l'événement $A \cup B$ et la probabilité demandée est donc $p\,(A \cup B)$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298.$$

$$\boxed{p(D) = 0,0298.}$$

c) L'événement E est l'événement contraire de l'événement D et donc $p(E) = 1 - p(D) = 1 - 0,0298 = 0,9702$.

$$\boxed{p(E) = 0,9702.}$$

d) La probabilité demandée est $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,0002}{0,02} = 0,01.$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,01.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le sac est défectueux » avec une probabilité $p = 0,03$ et « le sac n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,97$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

b) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{100}{0}(0,03)^0(0,97)^{100} = 1 - (0,97)^{100} = 0,95 \text{ arrondi au centième.}$$

c) On sait que $E(X) = np = 100 \times 0,03 = 3$. Ceci signifie qu'en moyenne, dans un lot de 100 sacs, 3 sont défectueux.

EXERCICE 4

1) La droite (BC) admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{CB}$ de coordonnées $(x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C)$ ou encore $(1, -1, 0)$. Le plan (P) est le plan passant par $A(1,2,0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{CB}(1,-1,0)$.
Une équation de ce plan est $1 \times (x-1) - 1 \times (y-2) + 0 \times (z-0) = 0$ ou encore $x - y + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (P) \text{ est } x - y + 1 = 0.}$$

2) **a)** Soit (x, y, z) un triplet de réels.

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y - 1 \\ z = y - 2 \\ -(y-1) + (y-2) + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y - 1 \\ z = y - 2 \\ 0y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 + y \\ z = -2 + y \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions du système est l'ensemble des triplets de la forme } (-1+y, y, -2+y),\ y \in \mathbb{R}.}$$

b) D'après la question a), un point $M(x, y, z)$ est dans l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) si et seulement si il existe un réel t tel que $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{array}\right.$. On reconnaît un système d'équations paramétriques de droite et donc $(P) \cap (Q) \cap (R)$ est une droite que l'on note (d). De plus, pour $t = 3$, on obtient le point de coordonnées $(2, 3, 1)$ c'est-à-dire le point E et donc le point E appartient à la droite (d).

$$\boxed{(P) \cap (Q) \cap (R) \text{ est une droite } (d) \text{ passant par le point } E(2,3,1).}$$

c) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$, alors l'égalité des troisièmes coordonnées fournit $1 = 3 \times 0$ ce qui est impossible). Les trois points B, C et D définissent donc bien un unique plan et les droites (BC) et (BD) sont deux droites sécantes (en B) du plan (BCD).

La droite (BC) est orthogonale au plan (P) et donc à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (BC) est orthogonale à la droite (d). De même, la droite (BD) est orthogonale à la droite (d).

Ainsi, la droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) et donc est orthogonale au plan (BCD).

La droite (d) est dirigée par le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{u}(1,1,1)$. Le plan (BCD) est donc le plan passant par $B(2,2,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(1,1,1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x-2) + 1 \times (y-2) + 1 \times (z-0) = 0$ ou encore $x + y + z - 4 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (BCD) \text{ est } x + y + z - 4 = 0.}$$

3) Puisque le plan (ABC) est parallèle à $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = z_A$ ou encore $z = 0$.
Puisque le plan (ABD) est parallèle à $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$, une équation cartésienne du plan (ABC) est $y = y_A$ ou encore $y - 2 = 0$.
Puisque le plan (ACD) est parallèle à $\left(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, une équation cartésienne du plan (ACD) est $x = x_A$ ou encore $x - 1 = 0$.

4) **a)** Soit $M(-1+t, t, -2+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (d).

- La distance de M au plan (ABC) est $\dfrac{|-2+t|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = |t-2|$.
- La distance de M au plan (ABD) est $\dfrac{|t-2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = |t-2|$.
- La distance de M au plan (ACD) est $\dfrac{|-1+t-1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = |t-2|$.

Ces trois distances sont égales et donc

$$\boxed{\text{tout point de la droite } (d) \text{ est équidistant des plans } (ABC), (ABD) \text{ et } (ACD).}$$

b) Soit $M(-1+t, t, -2+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (d).
La distance de M au plan (BCD) est $\dfrac{|-1+t+t-2+t-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|3t-7|}{\sqrt{3}}$.

Par suite, M est équidistant des quatre plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) si et seulement si $\dfrac{|3t-7|}{\sqrt{3}} = |t-2|$. Or

1ère solution.

$$\begin{aligned}\frac{|3t-7|}{\sqrt{3}} = |t-2| &\Leftrightarrow |3t-7| = \sqrt{3}|t-2| \Leftrightarrow 3t-7 = \sqrt{3}(t-2) \text{ ou } 3t-7 = -\sqrt{3}(t-2)\\ &\Leftrightarrow (3-\sqrt{3})t = 7-2\sqrt{3} \text{ ou } (3+\sqrt{3})t = 7+2\sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{7-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \text{ ou } t = \frac{7+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\\ &\Leftrightarrow t = \frac{(7-2\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} \text{ ou } t = \frac{(7+2\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \Leftrightarrow t = \frac{15+\sqrt{3}}{6} \text{ ou } t = \frac{15-\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$

Deuxième solution.

$$\begin{aligned}\frac{|3t-7|}{\sqrt{3}} = |t-2| &\Leftrightarrow |3t-7| = \sqrt{3}|t-2| \Leftrightarrow (3t-7)^2 = 3(t-2)^2 \Leftrightarrow 9t^2-42t+49 = 3t^2-12t+12\\ &\Leftrightarrow 6t^2-30t+37 = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 30^2 - 4\times 6\times 37 = 12$ et donc l'équation admet les deux solutions $t_1 = \dfrac{30-\sqrt{12}}{12} = \dfrac{15-\sqrt{3}}{6}$ et $t_2 = \dfrac{15+\sqrt{3}}{6}$.

Quand $t = \dfrac{15-\sqrt{3}}{6}$, on obtient le point $M_1\left(\dfrac{9-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{15-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ et quand $t = \dfrac{15+\sqrt{3}}{6}$, on obtient le point $M_2\left(\dfrac{9+\sqrt{3}}{6}, \dfrac{15+\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$.

Les points de coordonnées $\left(\dfrac{9-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{15-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ et $M_2\left(\dfrac{9+\sqrt{3}}{6}, \dfrac{15+\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ sont équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD).

