Session 2009

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multilple.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte, ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

a. (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.

b. (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

d. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz - 2i$.

a. f est une homothétie.

b. Le point d'affixe $-1 - 2i$ est un antécédent du point d'affixe i.

c. f est la rotation de centre le point d'affixe $1 + i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

d. f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|.$$

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$$1 - i,\ -1 + 2i \text{ et } -1 - 2i.$$

a. C est un point de (F).

b. (F) est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. (F) est la médiatrice du segment $[AC]$.

d. (F) est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z + |z|^2 = 7 + i.$$

Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

b. Une solution réelle.

c. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.

d. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

EXERCICE 2 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

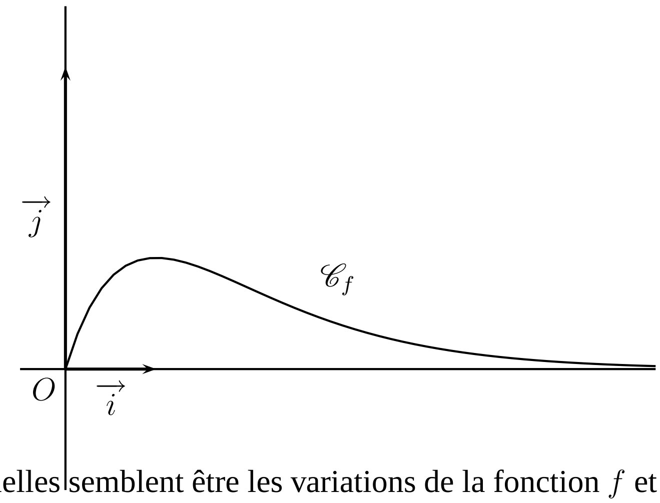
Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = x^2e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée ci-dessous.



1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur la figure jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Colorier sur la figure cette partie du plan.

2. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x}.$$

a. Calculer la dérivée H' de la fonction H.

b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction g.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. *Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.*

On prélève au hasard dans la production d'une journée.
On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $p(A) = 0,02$ et $p(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

a. Calculer la probabilité de l'événement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

b. Calculer la probabilité de l'événement D « le sac est défectueux ».

c. Calculer la probabilité de l'événement E « le sac ne présente aucun défaut ».

d. Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.
On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un des sacs est défectueux » ?
On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soient $A(1~;~2~;~0)$, $B(2~;~2~;~0)$, $C(1~;~3~;~0)$ et $D(1~;~2~;~1)$ quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\overrightarrow{i}~;~\overrightarrow{j}~;~\overrightarrow{k}\right)$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.
On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2. **a.** Résoudre le système $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases}$.

b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point $E(2~;~3~;~1)$.

c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).
En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $\left(O~;~\overrightarrow{i}~;~\overrightarrow{j}\right)$, $\left(O~;~\overrightarrow{i}~;~\overrightarrow{k}\right)$ *et* $\left(O~;~\overrightarrow{j}~;~\overrightarrow{k}\right)$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?