Session 2009

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Restitution organisée de connaissances
Prérequis : on rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si, et seulement si, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire.

a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$.

b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. Application : Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
- S : « son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à $0,1$ et que celle de S est égale à $0,05$. Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et on désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

a. Démontrer que $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.

c. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les trois plans de coordonnées

.

d. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Etude d'une surface

$\mathscr{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathscr{S}$ avec certains plans de l'espace.

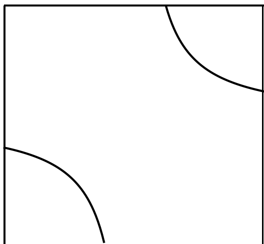
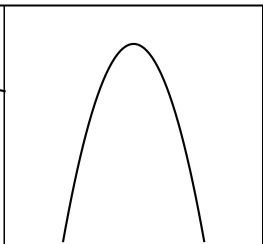
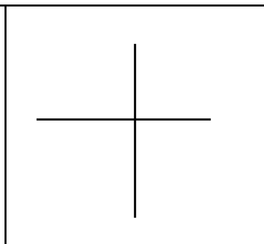
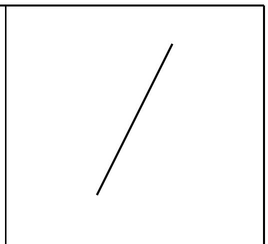
			

Figure n° 1	Figure n° 2	Figure n° 3	Figure n° 4

a. S_1 désigne la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan (xOy). Une des figures données représente S_1, laquelle ?

b. S_2 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{R}$ d'équation $z = 1$. Une des figures données représente S_2, laquelle ?

c. S_3 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = 8$. Une des figures données représente S_3, laquelle ?

d. S_4 désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x + 2y = 29$ de la question **2.**.
Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et à $\mathscr{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation $3x + 2y = 29$.

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une réponse fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, Re $(z^2) = (\text{Re}(z))^2$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

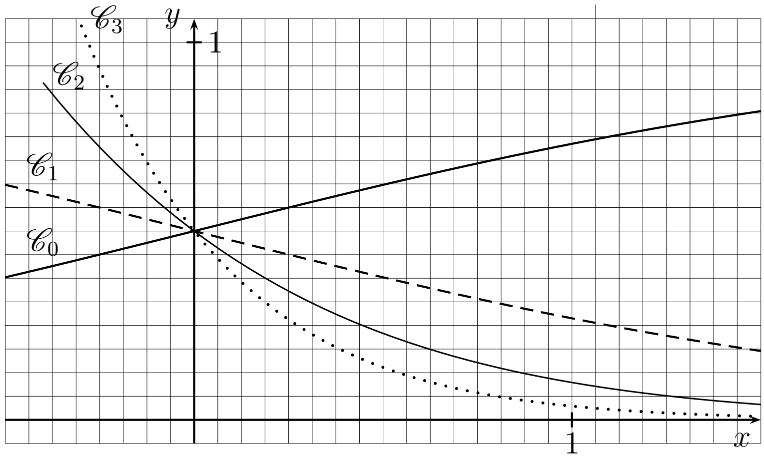
EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit n un entier naturel.
On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous.



Partie A - Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. Préciser ses coordonnées.

2. Etude de la fonction f_0

a. Etudier le sens de variation de f_0.

b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Etude de la fonction f_1

a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que son sens de variation.

c. Donner une interprétation géométrique de **3.a.** pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

b. En déduire les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Etude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.