BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

1) b)

2) d)

3) d)

Explications.

1) $p(A) = \dfrac{3}{5}$ et donc $p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - P(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \text{ (car A et B sont indépendants)} \\ &= p(A) + (1 - p(A))p(B). \end{aligned}$$

Par suite,

$$p(B) = \frac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)} = \frac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{5}} = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}.$$

La bonne réponse est la réponse b).

2)

$$\begin{aligned} p\,(X > 5) &= 1 - p\,(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1 - (-e^{-5\lambda} + e^0) = 1 + e^{-5\lambda} - 1 \\ &= e^{-5\times 0,04} = e^{-0,2} = 0,818... \\ &= 0,82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès.} \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse d).

3) On note P l'événement « ce soir, il pleut » et C l'événement « ce soir, je sors mon chien ».
L'énoncé donne $p(P) = \dfrac{1}{4}$, $p_P(C) = \dfrac{1}{10}$ et $p_{\overline{P}}(C) = \dfrac{9}{10}$. La probabilité demandée est $p_C(\overline{P})$.

$$p_C(\overline{P}) = \frac{p(\overline{P} \cap C)}{p(C)} = \frac{p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(C)}{p(C)} = \frac{(1 - p(P)) \times p_{\overline{P}}(C)}{p(C)}.$$

Il reste à calculer $p(C)$. D'après la formule des probabilités totales

$$p(C) = p(P \cap C) + p(\overline{P} \cap C) = p(P) \times p_P(C) + p(\overline{P}) \times p_{\overline{P}}(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{9}{10} = \frac{1}{40} + \frac{27}{40} = \frac{28}{40}.$$

Donc

$$p_C(\overline{P}) = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \times \dfrac{9}{10}}{\dfrac{28}{40}} = \frac{27/40}{28/40} = \frac{27}{28} \text{ et la bonne réponse est la réponse d).}$$

EXERCICE 2

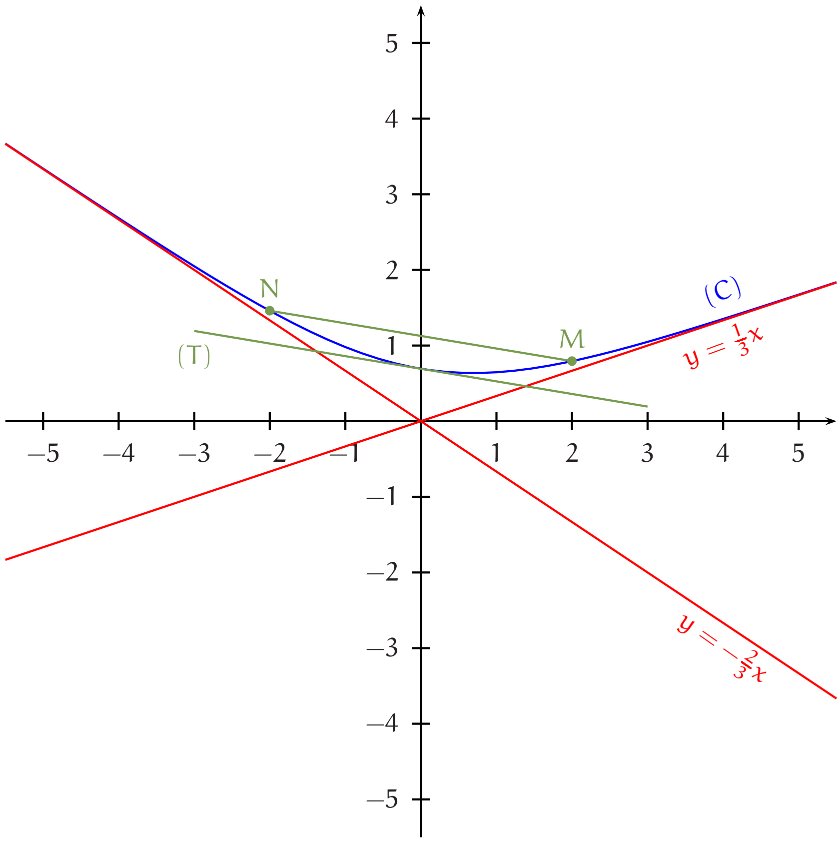
Partie A

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = \ln(1+0) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3}x = +\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) D'après la question a), $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{3}x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. Par suite,

$$\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } +\infty.}$$



c) Pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{3}x = \ln(1+e^{-x})$. Or, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $1 + e^{-x} > 1$ puis, par stricte croissance de la fonction $y \mapsto \ln(y)$ sur $]0, +\infty[$, pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) > \ln(1)$ ou encore

$$\text{pour tout réel } x, \ \ln(1+e^{-x}) > 0.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - \dfrac{1}{3}x > 0$ et donc

$$\boxed{\text{la courbe } (C) \text{ est strictement au-dessus de la droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{3}x \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

d) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}(e^{x}+1)) + \frac{1}{3}x = \ln(e^{-x}) + \ln(e^{x}+1) + \frac{1}{3}x = -x + \ln(e^{x}+1) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \ f(x) = \ln(e^{x}+1) - \frac{2}{3}x.}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = \ln(0+1) = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{1}{3} = -\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{3} \\ = \frac{-3+1+e^x}{3(e^x+1)} = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x) = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}.}$$

b) Pour tout réel x, $3(e^x+1) > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 2$. Or

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln(2) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}),$$

et de même, $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	$\ln(3) - \frac{2}{3}\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\begin{aligned} f(\ln(2)) &= \ln(1+e^{-\ln(2)}) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln\left(1+\tfrac{1}{e^{\ln(2)}}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln(3) - \ln(2) + \frac{\ln(2)}{3} \\ &= \ln(3) - \frac{2\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

Partie B

1) D'après la question A.1)c), la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0, n]$ et donc

$$d_n = \int_0^n \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, n]$, $\ln(1+e^{-x}) \leqslant e^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$d_n \leqslant \int_0^n e^{-x}\, dx.$$

Or, $\int_0^n e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^n = -e^{-n} + e^0 = 1 - e^{-n}$ et puisque $e^{-n} > 0$, on en déduit que $\int_0^n e^{-x}\, dx \leqslant 1$ puis que $d_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ d_n \leqslant 1.}$$

3) D'après la question précédente, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée. Vérifions que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

Soit n un entier naturel non nul. D'après la relation de Chasles

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx + \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx - \int_0^n \ln(1+e^{-x})\, dx = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[n, n+1]$, $\ln(1+e^{-x}) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-x})\, dx \geqslant 0$ ou encore $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$. On a ainsi montré que pour tout entier naturel non nul n, $d_{n+1} - d_n \geqslant 0$ et donc que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

En résumé, la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1. On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (d_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente.}}$$

Partie C

1) Le coefficient directeur de (T) est $f'(0) = \dfrac{e^0 - 2}{3(e^0+1)} = \dfrac{1-2}{3(1+1)} = -\dfrac{1}{6}$.

2) Soit x un réel non nul. Soient M et N les points de (C) d'abscisses respectives x et $-x$. D'après la question A.1)d)

$$\begin{aligned}
\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} &= \frac{1}{x-(-x)}\left(\left(\ln(1+e^{-x_M}) + \frac{1}{3}x_M\right) - \left(\ln(e^{x_N}+1) - \frac{2}{3}x_N\right)\right)\\
&= \frac{1}{2x}\left(\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x\right) - \left(\ln(e^{-x}+1) + \frac{2}{3}x\right)\right)\\
&= \frac{1}{2x}\times\left(-\frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{6} = f'(0).
\end{aligned}$$

Ainsi, les droites (T) et (MN) ont mêmes coefficients directeurs et donc

$$\boxed{\text{les droites } (T) \text{ et } (MN) \text{ sont parallèles.}}$$

EXERCICE 3

1) a) Le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$. D'autre part, puisque $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$, le point F a pour coordonnées $(1,0,1)$.
Les coordonnées du milieu I de [EF] sont alors $\left(\dfrac{x_E+x_F}{2},\dfrac{y_E+y_F}{2},\dfrac{z_E+z_F}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$.

Le point J est le symétrique du point E par rapport au point F. Donc

- $\dfrac{x_E+x_J}{2}=x_F$ puis $x_J=2x_F-x_E=2\times 1-0=2$.
- $\dfrac{y_E+y_J}{2}=y_F$ puis $y_J=2y_F-y_E=2\times 0-0=0$.
- $\dfrac{z_E+z_J}{2}=z_F$ puis $z_J=2z_F-z_E=2\times 1-1=1$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$ et le point J a pour coordonnées $(2,0,1)$.

b) Le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$ et et le point J a pour coordonnées $(2,0,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ a pour coordonnées $(x_J-x_D,y_J-y_D,z_J-z_D)$ ou encore $(2,-1,1)$.

Puisque $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et et le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0,1,1)$.
Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et et le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},0,1\right)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2},0,1\right)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites (BG) et (BI) sont deux droites sécantes du plan (BGI).

$\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BG}=2\times 0-1\times 1+1\times 1=0$ et $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BI}=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1\times 0+1\times 1=0$.
Par suite, le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc

Le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c) Le plan (BGI) est le plan passant par $B(1,0,0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{DJ}(2,-1,1)$. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2\times(x-1)-1\times(y-0)+1\times(z-0)=0$ ou encore $2x-y+z-2=0$.

Une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

d) La distance d du point $F(1,0,1)$ au plan (BGI) d'équation $2x-y+z-2=0$ est

$$d=\frac{|2-0+1-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

La distance du point F au plan (BGI) est $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

2) a) La droite (Δ) est la droite passant par $F(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DJ}(2,-1,1)$. Donc

une représentation paramétrique de la droite (Δ) est $\left\{\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=-t\\ z=1+t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

b) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et le point H a pour coordonnées $(0,1,1)$. Donc, le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_H}{2},\dfrac{y_A+y_H}{2},\dfrac{z_A+z_H}{2}\right)$ ou encore $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.
Or, pour $t=-\dfrac{1}{2}$, on obtient $1+2t=0$, $-t=\dfrac{1}{2}$ et $1+t=\dfrac{1}{2}$. Donc,

Le centre K de la face $ADHE$ appartient à la droite (Δ).

c) Soit $M(1+2t, -t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (BGI) \Leftrightarrow 2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}.$$

Quand $t = -\frac{1}{6}$, on obtient $1 + 2t = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ puis $-t = \frac{1}{6}$ et enfin $1 + t = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Donc

$$\boxed{\text{La droite } (\Delta) \text{ et le plan BGI sont sécants en le point } L\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right).}$$

Remarque. $FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{6^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et on retrouve le résultat de la question 1)d).

d) $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{LI} = 0 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + 1 \times \left(0 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point L est sur la hauteur issue de B du triangle BGI.

$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{LG} = -\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 0 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) + 1 \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0$. Donc le point L est sur la hauteur issue de G du triangle BGI.

Le point L est sur deux des trois hauteurs du triangle BGI et donc

$$\boxed{\text{le point L est l'orthocentre du triangle BGI.}}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) $2009 = 125 \times 16 + 9$ et donc $2009 \equiv 9$ mod 16. Par suite $2009^2 \equiv 81$ mod 16. Comme $81 = 5 \times 16 + 1$, on a encore $2009^2 \equiv 1$ mod 16. Puisque $0 \leqslant 1 < 16$, on a montré que

$$\boxed{\text{le reste de la division euclidienne de } 2009^2 \text{ par } 16 \text{ est } 1.}$$

2) $2009^{8001} = (2009^2)^{4000} \times 2009$. D'après la première question, $2009^{8001} \equiv 1^{4000} \times 2009$ mod 16 ou encore

$$\boxed{2009^{8001} \equiv 2009 \text{ mod } 16.}$$

Partie B

1) **a)** $2009 \equiv -1$ mod 5 et donc $2009^2 - 1 \equiv (-1)^2 - 1$ mod 5 ou encore $u_0 \equiv 0$ mod 5. On a montré que

$$\boxed{u_0 \text{ est divisible par } 5.}$$

b) Soit n un entier naturel. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= (u_n + 1)^5 - 1 = u_n^5 + \binom{5}{1}u_n^4 \times 1 + \binom{5}{2}u_n^3 \times 1^2 + \binom{5}{3}u_n^2 \times 1^3 + \binom{5}{4}u_n^1 \times 1^4 + 1^5 - 1 \\
&= u_n^5 + 5u_n^4 + \frac{5 \times 4}{2}u_n^3 + \frac{5 \times 4}{2}u_n^2 + 5u_n \\
&= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n = u_n[u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5] \\
&= u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)].}$$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

• Pour $n = 0$, la question B.1)a) montre que u_0 est divisible par $5 = 5^{0+1}$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n soit divisible par 5^{n+1}.
Puisque $n+1 \geqslant 1$, u_n est en particulier divisible par 5. Il en est alors de même de u_n^4 puis de $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$. Ainsi, il existe deux entiers k et k' tels que $u_n = 5^{n+1}k$ et $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) = 5k'$. Mais alors

$$u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)] = 5^{n+1}k \times 5k' = kk'5^{(n+1)+1}$$

et donc u_{n+1} est divisible par $5^{(n+1)+1}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \text{ est divisible par } 5^{n+1}.}$$

2) **a)** $u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = (2009^2)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$, $u_2 = (2009^{10})^5 - 1 = 2009^{50} - 1$ et enfin, $u_3 = (2009^{50})^5 - 1 = 2009^{250} - 1$.

D'après la question 1)c), u_3 est divisible par $5^4 = 625$ et donc $2009^{250} \equiv 1$ mod 625.

$$\boxed{2009^{250} \equiv 1 \text{ mod } 625.}$$

b) $2009^{8001} = (2009^{250})^{32} \times 2009$ et donc $2009^{8001} \equiv 1^{32} \times 2009$ mod 625 ou encore

$$\boxed{2009^{8001} \equiv 2009 \text{ mod } 625.}$$

Partie C

1) D'après la question A.2), $2009^{8001} - 2009$ est un multiple de 16 et d'après la question B.2)b), $2009^{8001} - 2009$ est un multiple de 625. Donc $2009^{8001} - 2009$ est un multiple du PPCM de 16 et de 625. Puisque $16 = 2^4$ et $625 = 5^4$, les entiers 16 et 625 n'ont pas de facteur premier commun et ces entiers sont donc premiers entre eux. Le PPCM de 16 et 625 est donc $16 \times 625 = 10000$ et $2009^{8001} - 2009$ est finalement un multiple de 10000.

$$\boxed{2009^{8001} - 2009 \text{ est divisible par } 10000.}$$

2) $2009^{8001} = (2009^{2667})^3$ et donc si on pose $N = 2009^{2667}$, $N^3 \equiv 2009 \bmod 10000$. Donc il existe un entier k tel que $N^3 = k \times 10^4 + 2009$ ou encore l'écriture décimale de N^3 se termine par 2009.

$$\boxed{2009^{2667} \text{ est un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par } 2009.}$$

