

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.

Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p .

On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(\bar{A}) = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'événement B est égale à :

- a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement $(X \leq t)$, notée $p(X \leq t)$, est

donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

- a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien

avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

- a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).
c) Étudier la position relative de (D) et de (C).
d) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.
e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.
b) En déduire les variations de la fonction f .

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$
2. On admet que pour tout réel x , $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$.
3. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

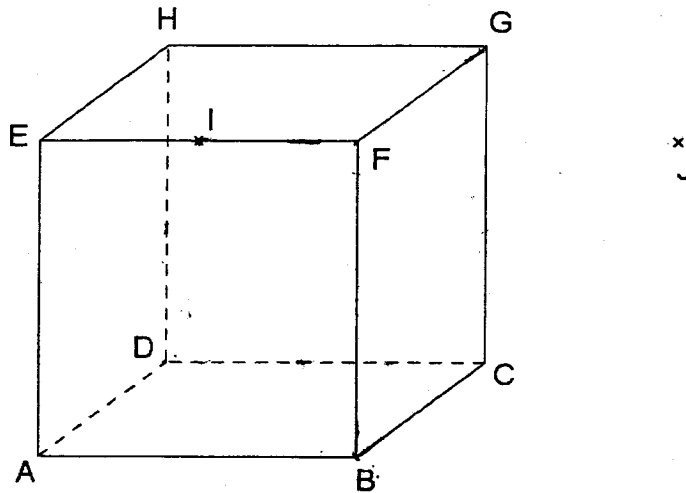
1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.



1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
b) Vérifier que le vecteur \overline{DJ} est un vecteur normal au plan (BGI).
c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
 - a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
 - b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
 - c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.
 - d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2009^2 - 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1.$$

1.
 - a. Démontrer que u_0 est divisible par 5.
 - b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)].$$

- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .
2.
 - a. Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
 - b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.