BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Réunion

EXERCICE 1

1) **c.**

2) **d.**

3) **c.**

4) **a.**

Explications.

1) On sait que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = \omega + Re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, (où R est un réel strictement positif et ω est un nombre complexe) est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R. Ici, $\omega = 1 - 2i$ et $R = 1$. La bonne réponse est donc la réponse c.

2) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$. On sait alors que f est une rotation. L'angle de f est $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
Le centre de f est son point invariant. Soit z un nombre complexe.

$$z = z' \Leftrightarrow z = -iz - 2i \Leftrightarrow (1+i)z = -2i \Leftrightarrow z = \frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-2i-2}{1^2+1^2}$$
$$\Leftrightarrow z = -1 - i.$$

La bonne réponse est la réponse d. On peut noter que si $z = -1 - 2i$, $z' = -i(-1-2i) - 2i = i - 2 - 2i = -2 - i \neq i$.

3) Soit M un point du plan d'affixe z.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z + 1 + 2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_C| \Leftrightarrow AM = CM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AC].$$

La bonne réponse est la réponse c.

4) Si z est un nombre réel, alors $z + |z|^2$ est un nombre réel et puisque $7 + i \notin \mathbb{R}$, on ne peut avoir $z + |z|^2 = 7 + i$. La réponse b. est fausse. Ensuite, la partie imaginaire de $z + |z|^2$ est celle de z. Cette partie imaginaire doit être égale à celle de $7 + i$ c'est-à-dire 1. Donc les réponses c. et d. sont fausses. Il ne reste que la réponse a. Vérifions-le.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + iy = 7 + i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 7 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4(-6) = 25$. Cette équation admet les deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. L'ensemble des solutions de l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ est $\{2 + i, -3 + i\}$. La réponse a. est donc effectivement correcte.

EXERCICE 2

PARTIE A

1) Il semble que la fonction f soit strictement croissante sur $[0,1]$ puis strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. D'autre part, il semble que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2) Variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif x,

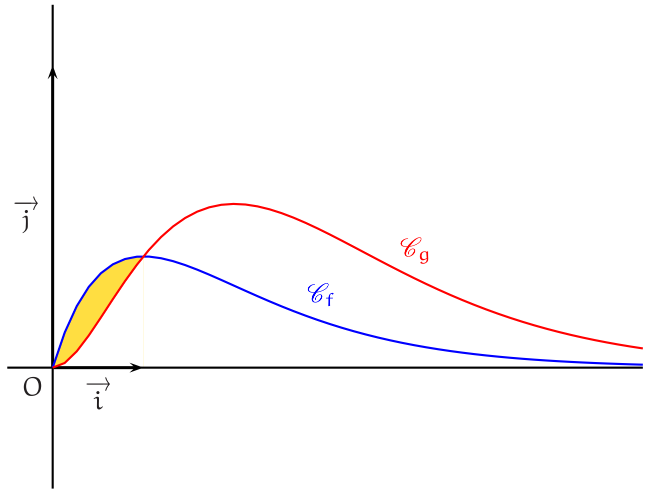
$$f'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $[0,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$ puis que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel positif x, $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

Les conjectures émises à la question 1) sont donc validées.

3) La calculatrice permet de construire le graphique suivant :



4) Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$, strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$ et enfin il semble que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses 0 et 1. Démontrons-le.

Soit x un réel positif.

$$g(x) - f(x) = x^2e^{-x} - xe^{-x} = x(x-1)e^{-x}.$$

Pour tout réel positif x, on a $e^{-x} > 0$. Par suite, pour tout réel positif x, $g(x) - f(x)$ est du signe de $x(x-1)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-f(x)$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$. Enfin, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leurs points d'abscisses 0 et 1. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

$\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]0,1[$ et strictement au-dessous sur $]1,+\infty[$.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

PARTIE B

1) Voir graphique.

2) Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x \times (-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})\,dx = -e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

$$\boxed{I = 1 - \frac{2}{e}.}$$

3) a) La fonction H est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}H'(x) &= -(2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)(-e^{-x}) = -(2x+2)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x} = (-2x-2+x^2+2x)e^{-x} \\ &= (x^2-2)e^{-x}.\end{aligned}$$

b) Pour $x \geqslant 0$, posons $G(x) = H(x) - 2e^{-x}$. G est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$G'(x) = H'(x) + 2e^{-x} = (x^2-2)e^{-x} + 2e^{-x} = x^2e^{-x} = g(x).$$

Une primitive de la fonction g sur $[0,+\infty[$ est donc la fonction $G\ :\ x \mapsto H(x) - 2e^{-x} = -(x^2+2x+2)e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } g \text{ sur } [0,+\infty[\text{ est donc la fonction } G\ :\ x \mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x}.}$$

4) D'après la question A.4., la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $[0,1]$. Par suite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - (G(1) - G(0)) \\ &= \left(1 - \frac{2}{e}\right) - \left(-(1^2+2+2)e^{-1} + 2e^0\right) = \left(1 - \frac{2}{e}\right) - \left(2 - \frac{5}{e}\right) = \frac{3}{e} - 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{3}{e} - 1.}$$

EXERCICE 3

1) a) La probabilité demandée est $p\,(A \cap B)$. Puisque les événements A et B sont indépendants,

$$p\,(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002.$$

$$\boxed{p(C) = 0,0002.}$$

b) L'événement « le sac est défectueux » est l'événement $A \cup B$ et la probabilité demandée est donc $p\,(A \cup B)$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298.$$

$$\boxed{p(D) = 0,0298.}$$

c) L'événement E est l'événement contraire de l'événement D et donc $p(E) = 1 - p(D) = 1 - 0,0298 = 0,9702$.

$$\boxed{p(E) = 0,9702.}$$

d) La probabilité demandée est $p_A(B)$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,0002}{0,02} = 0,01.$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,01.}$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 100 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le sac est défectueux » avec une probabilité $p = 0,03$ et « le sac n'est pas défectueux » avec une probabilité $1 - p = 0,97$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

b) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{100}{0}(0,03)^0(0,97)^{100} = 1 - (0,97)^{100} = 0,95 \text{ arrondi au centième.}$$

c) On sait que $E(X) = np = 100 \times 0,03 = 3$. Ceci signifie qu'en moyenne, dans un lot de 100 sacs, 3 sont défectueux.

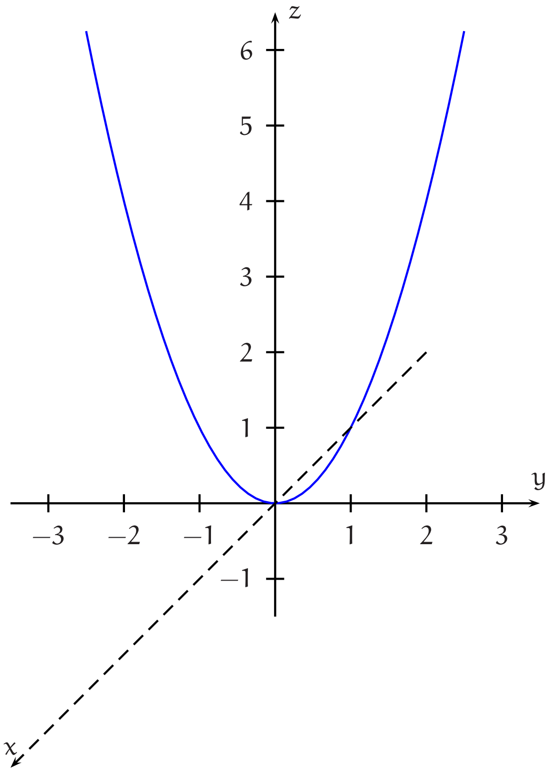
EXERCICE 4

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. La distance du point M au plan P d'équation $z + \frac{1}{4} = 0$ est $\frac{\left|z + \frac{1}{4}\right|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \left|z + \frac{1}{4}\right|$ et la distance de M au point F est $\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$. Donc

$$d(M, P) = MF \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} \Leftrightarrow z = x^2 + y^2.$$

2) a) La surface (S) est une surface de révolution d'axe (Oz) et le plan d'équation $z = 2$ est perpendiculaire à (Oz). Donc, l'intersection de (S) avec le plan d'équation $z = 2$ est un cercle.

b) Un point $M(x, y, z)$ est dans l'intersection de (S) avec le plan d'équation $x = 0$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z = y^2 \end{array}\right.$. Cette intersection est donc une parabole.



3) a) Soit x un entier naturel. Modulo 7, x est congru à l'un des sept entiers 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

- Si $x \equiv 0 \pmod 7$ alors $x^2 \equiv 0 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 1 \pmod 7$ alors $x^2 \equiv 1 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 2 \pmod 7$ alors $x^2 \equiv 4 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 3 \pmod 7$ alors $x^2 \equiv 9 \pmod 7$ ou encore $x^2 \equiv 2 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 4 \pmod 7$ alors $x \equiv -3 \pmod 7$ et donc $x^2 \equiv 2 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 5 \pmod 7$ alors $x \equiv -2 \pmod 7$ et donc $x^2 \equiv 4 \pmod 7$.
- Si $x \equiv 6 \pmod 7$ alors $x \equiv -1 \pmod 7$ et donc $x^2 \equiv 1 \pmod 7$.

Pour tout entier naturel x, x^2 est congru à 0, 1, 2 ou 4 modulo 7.

b) Soient x et y deux entiers naturels. D'après la question a), modulo 7, $x^2 + y^2$ est congru à l'une des sommes

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 0 + 2 = 2,\ 0 + 4 = 4,\ 1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 3,\ 1 + 4 = 5,\ 2 + 2 = 4,\ 2 + 4 = 6,\ 4 + 4 = 8.$$

Maintenant, l'entier $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si cet entier est congru à 0 modulo 7.

Or, une et une seule des sommes ci-dessus est congrue à 0 modulo 7 à savoir la somme $0+0=0$. D'après la question a), cette somme est obtenue dans une situation et une seule à savoir $x \equiv 0 \pmod 7$ et $y \equiv 0 \pmod 7$ ou encore x et y divisibles par 7.
En résumé, 7 divise x^2+y^2 si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4) Soient x et y deux entiers naturels. Un point $M(x, y, 98)$ est solution si et seulement si $x^2+y^2=98$. Puisque $98=7\times 14$ est divisible par 7, si $x^2+y^2=98$, alors x et y sont deux entiers naturels divisibles par 7. Ainsi, x et y sont éléments de $\{0, 7, 14, 21, ...\}$.

Maintenant, si $x=0$ alors $y^2=98$ ce qui est impossible et si $x \geqslant 14$, alors $y^2=98-x^2 \leqslant 98-14^2<0$. Il ne reste que $x=7$ puis $y^2=98-7^2=49$ et donc $y=7$.

Réciproquement, le point de coordonnées $(7, 7, 98)$ appartient à l'intersection de (S) et du plan d'équation $z=98$ et ses coordonnées sont des entiers naturels.

L'intersection de (S) et du plan d'équation $z=98$ contient un et un seul point dont les coordonnées sont des entiers naturels à savoir le point de coordonnées $(7, 7, 98)$.

