BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Polynésie

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

a) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))} \\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$$

b) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

• C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après a))} \\ &= (\overline{z})^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n.}$$

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$, $z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4$. D'autre part, puisque -4 est un nombre réel, $z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow (\overline{z})^4 = -4$. On a montré que

$$\boxed{\text{si } z \text{ est solution de } (E) \text{ alors } -z \text{ et } \overline{z} \text{ sont solutions de } (E).}$$

2. a) $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$$\boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.}$$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3. L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et $-\overline{z_0} = -1 + i$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet pour solutions } 1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i \text{ et } -1 - i.}$$

Partie C

1. L'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Donc l'expression complexe de la rotation r est

$$\begin{aligned}
z' &= -1 - i + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(z + 1 + i) = -1 - i + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i) \\
&= \frac{1}{2}(-2 - 2i) + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-2 - 2i + 1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3} + i) \\
&= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}))
\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
z_E &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_B + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-1 + i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = -1 + \sqrt{3}.}$$

b)

$$\begin{aligned}
z_F &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_D + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 - i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3} - i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -i(1 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -i(1 + \sqrt{3}).}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} &= \frac{1 + i - (-1 + \sqrt{3})}{1 + i + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i(2 + \sqrt{3})} = (2 - \sqrt{3})\frac{1 + \dfrac{i}{2 - \sqrt{3}}}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \\
&= (2 - \sqrt{3})\frac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \text{ (car } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1) \\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d) Un réel non nul admet pour argument 0 ou π modulo 2π et donc

$$\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = 0\ [\pi].$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les points } A, E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$$

EXERCICE 2

Partie A - Un seul robot

1. Notons p la probabilité que le robot passe par le sommet I. Alors,

$$1 = p(S) + p(I) + p(X) = 2p + p + 2p = 5p,$$

et donc $p = \dfrac{1}{5}$.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un robot passe par le sommet I est } \frac{1}{5}.}$$

2. Puisque les étapes sont indépendantes les unes des autres, la probabilité que le robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{125}$.

$$\boxed{p(E) = \frac{4}{125}.}$$

3. Il y a $3! = 6$ trajets passant par les sommets S, I et X à savoir SIX, SXI, ISX, IXS, XSI et XIS. Chacun de ces trajets a une probabilité $\dfrac{4}{125}$ et donc $p(F) = 6 \times \dfrac{4}{125} = \dfrac{24}{125}$.

$$\boxed{p(F) = \frac{24}{125}.}$$

Partie B - Plusieurs robots

Notons X le nombre de robots passant successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le robot passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $p = \dfrac{4}{125}$ ou « le robot ne passe pas successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{121}{125}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{4}{125}$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{4}{125}\right)^0 \times \left(\frac{121}{125}\right)^n = 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{121}{125}\right)^n \leqslant 0,01 &\Leftrightarrow \left(\frac{125}{121}\right)^n \geqslant 100 \text{ (car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{125}{121}\right)^n\right) \geqslant \ln(100) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{125}{121}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{125}{121}\right)} \text{ (car } \frac{125}{121} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{125}{121}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 141,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 142 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le nombre minimal cherché est } 142.}$$

EXERCICE 3

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2, 1, -1)$. Le plan (P) admet donc pour équation cartésienne $2(x-3)+(y-2)-z = 0$ ou encore $2x + y - z - 8 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } (P) \text{ est } 2x + y - z - 8 = 0.}$$

2. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (S) \Leftrightarrow AM^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la sphère } (S) \text{ est } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0.}$$

3. a) $d(A, (Q)) = \dfrac{|x_A - y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{|1 - 1 + 2 + 4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Maintenant, (S) est la sphère de centre A et de rayon $AB = \sqrt{6}$. Donc le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

$$\boxed{d(A, (Q)) = \sqrt{6} \text{ et le plan } (Q) \text{ est tangent à la sphère } (S).}$$

b) $d(A, (P)) = \dfrac{|2 + 1 - 1 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = AB$. Donc

$$\boxed{\text{le plan } (P) \text{ est tangent à la sphère } (S).}$$

4. a) Le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}_1(2, 1, -1)$ et le plan (Q) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}_2(1, -1, 2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (si $\overrightarrow{n}_2 = k\overrightarrow{n}_1$, alors $k = -1$ en considérant la deuxième coordonnée mais aussi $k = -2$ en considérant la troisième ce qui est impossible). Donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles et on sait alors que

$$\boxed{\text{les plans } (P) \text{ et } (Q) \text{ sont sécants en une droite.}}$$

b) Pour tout réel t,

$$2t + (12 - 5t) - (4 - 3t) - 8 = 2t - 5t + 3t + 12 - 4 - 8 = 0.$$

Donc tout point de (D) est dans (P) ou encore (D) est contenue dans (P). De même, pour tout réel t

$$t - (12 - 5t) + 2(4 - 3t) + 4 = t + 5t - 6t - 12 + 8 + 4 = 0.$$

Donc la droite (D) est contenue dans (Q). Finalement la droite (D) est contenue dans (P) et dans (Q) et, puisque $(P)\cap(Q)$ est une droite, $(P) \cap (Q) = (D)$.

c) Le centre d'une sphère n'appartient à aucun plan tangent. Donc A n'appartient pas à (P) ou à (Q) et finalement A n'appartient pas à (D).

d) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$MB = MC \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \Leftrightarrow -6x + 9 = 2z + 1 \Leftrightarrow 6x + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x + z - 4 = 0$.

Donc l'ensemble des points à égale distance des points B et C est le plan (R') d'équation $3x + z - 4 = 0$.

Maintenant, $3x_A + z_A - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$ et pour tout réel t, $3t + (4 - 3t) - 4 = 0$. Donc le plan (R') contient le point A et la droite (D). Par suite, le plan (R') est le plan (R) et donc le plan (R) est l'ensemble des points équidistants des points B et C. L'affirmation de l'énoncé est vraie.

EXERCICE 4

Partie A

1. a) • La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a $g'(1) = 0$ et pour $x > 1$, $g'(x) < 0$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

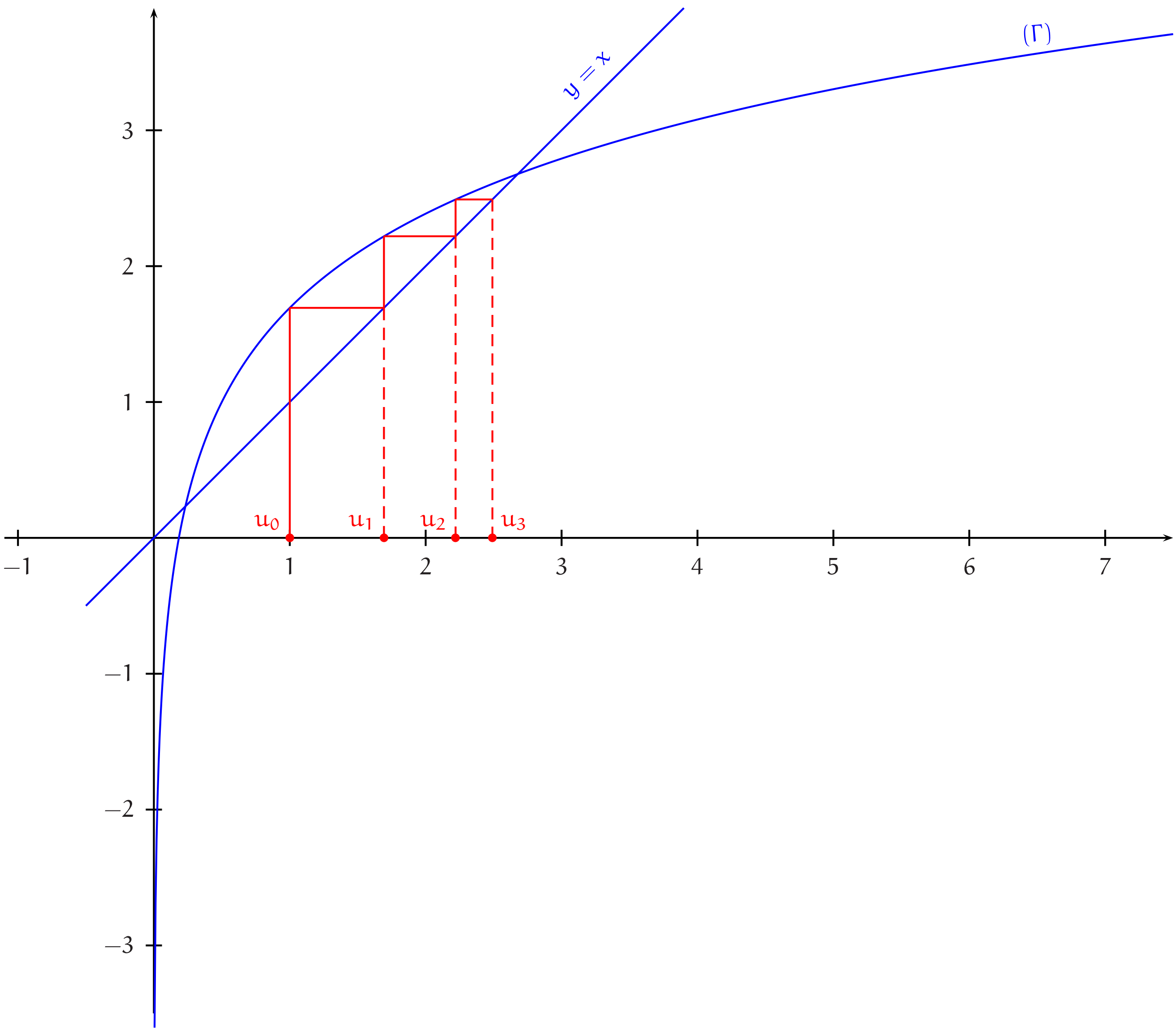
• Pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) = -x\left(1 - \frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = -x\left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par suite, pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)] =]-\infty, \ln 2]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $]-\infty, \ln 2]$ (car $\ln 2 > 0$), on a montré en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [1, +\infty[.}$$

b) L'égalité $g(\alpha) = 0$ s'écrit $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ ou encore $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. a) Construction des quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, $\ln(2\times 1)+1 \leqslant \ln(2u_n)+1 \leqslant \ln(2\times 3)+1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1+\ln 6 = 2,7\ldots \leqslant 3$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3.}$$

A partir d'ici, on doit constater que l'énoncé n'est pas résoluble tel qu'il est posé : le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne peut être précisé que si l'on connaît la position de u_n par rapport à α. La question qui devait être posée était donc : « Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ». C'est cette question que l'on résout dorénavant.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$ et puisque $\alpha \geqslant 1$ d'après la question 1.a).

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, $\ln(2\times 1)+1 \leqslant \ln(2u_n)+1 \leqslant \ln(2\times\alpha)+1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ d'après la question 1.b).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha.}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(2u_n) + 1 - u_n = g(u_n)$. Or $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et donc, puisque la fonction g est décroissante sur $[1,\alpha]$, $g(u_n) \geqslant g(\alpha)$ ou encore $g(u_n) \geqslant 0$ et enfin $u_{n+1} \geqslant u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $[1,\alpha]$. Maintenant, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$, on obtient $\ell = \ln(2\ell) + 1$ ou encore $g(\ell) = 0$. Mais alors $\ell = \alpha$ par unicité de α. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

Partie B

1. a) 1 ère solution. Soient x et y deux réels de $[1,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$$F(y) - F(x) = \int_1^y (t-1)e^{1-t}\,dt - \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \int_x^y (t-1)e^{1-t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[x,y]$, on a $(t-1)e^{1-t} \geqslant 0$ (car $t \geqslant x \geqslant 1$) et donc, par positivité de l'intégrale, $F(y) - F(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tous réels x et y de $[1,+\infty[$, $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante sur } [1,+\infty[.}$$

2 ème solution. La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$. On sait alors que la fonction F est définie et dérivable sur $[1,+\infty[$ et plus précisément que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 1. Par suite, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x} \geqslant 0$. Puisque la fonction F' est positive sur $[1,+\infty[$, la fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b) Soit $x \geqslant 1$. Pour t dans $[1,x]$, posons $u(t) = t - 1$ et $v(t) = -e^{1-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1,x]$ et pour t dans $[1,x]$ on a

$$\begin{array}{cc} u(t) = t-1 & v(t) = -e^{1-t} \\ u'(t) = 1 & v'(t) = e^{1-t} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1,x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \left[(t-1)(-e^{1-t})\right]_1^x - \int_1^x 1\times(-e^{1-t})\,dt = -(x-1)e^{1-x} - 0 - \left[e^{1-t}\right]_1^x \\ &= -(x-1)e^{1-x} - (e^{1-x} - e^0) = -xe^{1-x} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1,+\infty[,\ F(x) = -xe^{1-x} + 1.}$$

c) Soit x un réel de $[1,+\infty[$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -xe^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xe^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(2xe^{1-x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln(e^{1-x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x.$$

2. La fonction f est continue et positive sur $[1, a]$. Donc aire de $(D_a) = \displaystyle\int_1^a f(t)\,dt = F(a)$.

Maintenant, d'après la question précédente, $F(a) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(2a) + 1 = a \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha$.