BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Réunion

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Puisque pour tout réel x de $]-1,+\infty[$ on a $x+1>0$, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$. Il en est de même de f et pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-1,+\infty[.}$$

b) • $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \ln(x+1)=\lim_{\substack{X\to0\\X>0}}\ln(X)=-\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$.

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to-1}1-x=2$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1}\ln(1+x)=-\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}(\ln(1+x)+1-x)=-\infty$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0$ d'après un théorème de croissances comparées.

Maintenant, pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, on a $x+1\neq0$ puis $g(x)=-x+1+\ln(1+x)=(x+1)\left(\dfrac{-x+1}{x+1}+\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\right)$ $(*)$.

Pour $x>0$, $\displaystyle\frac{-x+1}{x+1}=\frac{-x}{x}\times\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-1$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+1}{x+1}+\frac{\ln(1+x)}{x+1}\right)=-1$. Comme d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, L'égalité $(*)$ nous permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-1}g(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty.}$$

c) La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]-1,+\infty[$ et pour tout $x>-1$,

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{x+1}.$$

Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, on a $x+1>0$ et donc $g'(x)$ est du signe de $-x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction g.

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

d) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-1,0]$. Donc pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to -1} g(x), g(0)] =]-\infty, 1]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]-1,0]$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]-1,0]$. On note α cette solution. Puisque $g(0) = 1 \neq 0$, on a $\alpha \neq 0$ et donc $\alpha \in]-1,0[$.
De même, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to +\infty}, g(0)] =]-\infty, 1]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. On note β cette solution. On a $g(2) = \ln(3) - 1 = 0,09\ldots > 0$ et $g(3) = \ln(4) - 2 = -0,6\ldots < 0$. Ainsi, $g(2) > g(\beta) > g(3)$ et puisque la fonction g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, on a $2 < \beta < 3$. On a montré que $\beta \in [2,3]$.

e) La fonction g est strictement croissante sur $]-1,\alpha]$. Donc, pour tout x de $]-1,\alpha[$, on a $g(x) < g(\alpha) = 0$. Ainsi, la fonction g est strictement négative sur $]-1,\alpha[$.
De même, la fonction g est strictement positive sur $]\alpha,0]$, strictement positive sur $[0,\beta[$ et strictement négative sur $]\beta,+\infty[$.
En résumé,

la fonction g est strictement négative sur $]-1,\alpha[$ et sur $]\beta,+\infty[$, strictement positive sur $]\alpha,\beta[$ et s'annule en α et β.

Le signe de $g(x) = f(x) - x$ fournit la position relative de la courbe C_f et de la droite D :

C_f est strictement au-dessous de D sur $]-1,\alpha[$ et sur $]\beta,+\infty[$, strictement au-dessus de D sur $]\alpha,\beta[$ et C_f coupe D aux points d'abscisses α et β.

Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n existe et $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

• Puisque $u_0 = 2$, c'est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n existe et $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Puisque $[2,\beta] \subset]-1,+\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
Maintenant, puisque la fonction f est croissante sur $]-1,+\infty[$ et que $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, on en déduit que $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\beta)$ ou encore que $f(2) \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$ (l'égalité $g(\beta) = 0$ fournit $f(\beta) = \beta$). Mais $f(2) = 1 + \ln(3) = 2,09 \geqslant 2$ et donc $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2) Etudions le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or $u_n \in [2,\beta]$ et, d'après la question 2)e) de la partie A, on a $g(u_n) \geqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \geqslant u_n$.
On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par β d'après la question précédente. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un certain réel ℓ de l'intervalle $[2,\beta]$.
De plus, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \ln(1 + u_n)) = 1 + \ln(1 + \ell)$ et donc le réel ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ ou encore de l'équation $g(x) = 0$ et appartient à $[2,\beta]$. Comme l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2,\beta]$, à savoir β, on en déduit que $\ell = \beta$. On a montré que

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

EXERCICE 2

Partie I

1) A chaque lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Puisque les lancers sont effectués de manière indépendante, la probabilité d'obtenir deux faces noires c'est-à-dire une face noire à chaque lancer est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir deux faces noires est } \frac{1}{9}.}$$

2) De même, la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et la probabilité d'obtenir deux faces rouges est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc

$$p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

$$\boxed{p(C) = \frac{7}{18}.}$$

3) L'événement « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes » est l'événement $\overline{C}$ et $p\left(\overline{C}\right) = 1 - p(C) = \frac{11}{18}$.

$$\boxed{p\left(\overline{C}\right) = \frac{11}{18}.}$$

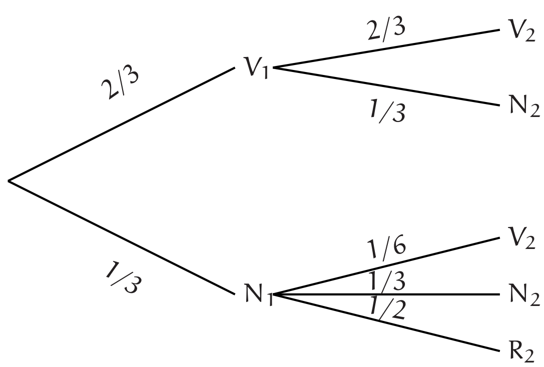
4) Notons V l'événement « les deux faces obtenues sont vertes ». La probabilité demandée est $p_C(V)$. Or

$$p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{18}{7 \times 36} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}.$$

$$\boxed{p_C(V) = \frac{1}{14}.}$$

Partie II

1) **a)** On note V_1, V_2, N_1, ..., les probabilités d'obtenir une face verte au premier lancer, au deuxième lancer, une face noire au premier lancer ... Représentons alors la situation par un arbre.



b) Puisqu'on a obtenu une face verte au premier lancer, on a relancé le dé B avec une probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'obtenir une face verte au deuxième lancer.

$$\boxed{p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p(V_1 \cap V_2)$. Or

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

3) La probabilité demandée est $p(V_2)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap V_2)$. On sait déjà que $p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{9}$. Ensuite,

$$p(N_1 \cap V_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Finalement, $p(V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer est $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 3
Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $x>0$,

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{x^2e^{2x}}{x^2}=e^{2x}.$$

2) Mais alors, il existe un réel C tel que pour tout réel $x>0$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ puis $f(x)=xg(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx$. En résumé, si f vérifie la condition (E) alors il existe un réel C tel que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx$.

Réciproquement, s'il existe un réel C tel que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx$, alors la fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$xf'(x)-f(x)=x\left(\frac{1}{2}e^{2x}+xe^{2x}+C\right)-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx\right)=x^2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx-\frac{1}{2}xe^{2x}-Cx=x^2e^{2x},$$

et donc la fonction f vérifie la condition (E).

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ vérifiant la condition } (E) \text{ sont les fonctions définies sur }]0,+\infty[\text{ par } f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx \text{ où } C \text{ est un réel.}}$$

3) Soient C un réel puis f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}+Cx$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}+\frac{C}{2}=0\Leftrightarrow C=-\frac{e}{2}.$$

La fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$ est la fonction définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{e}{2}x$.

Partie B

1) On sait déjà que $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Ensuite, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$h(x)=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{e}{2}x=\frac{x}{2}(e^{2x}-e).$$

Pour tout réel $x>0$, on a $\frac{x}{2}>0$ et donc, pour tout réel $x>0$, $h(x)$ est du signe de $e^{2x}-e$. Or

$$\begin{aligned}e^{2x}-e>0&\Leftrightarrow e^{2x}>e^1\Leftrightarrow 2x>1 \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R})\\&\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Enfin, $h(0)=0$ et finalement

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est strictement négative sur } \left]0,\frac{1}{2}\right[, \text{ strictement positive sur } \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\text{ et s'annule en } 0 \text{ et } \frac{1}{2}.}$$

2) a) Pour x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, posons $u(x)=x$ et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et pour x dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ on a

$$\begin{array}{ll}u(x)=x & v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\\ u'(x)=1 & v'(x)=e^{2x}\end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = \left[x \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^1 - 0 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}e - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e^0\right)$$
$$= \frac{1}{4}.$$

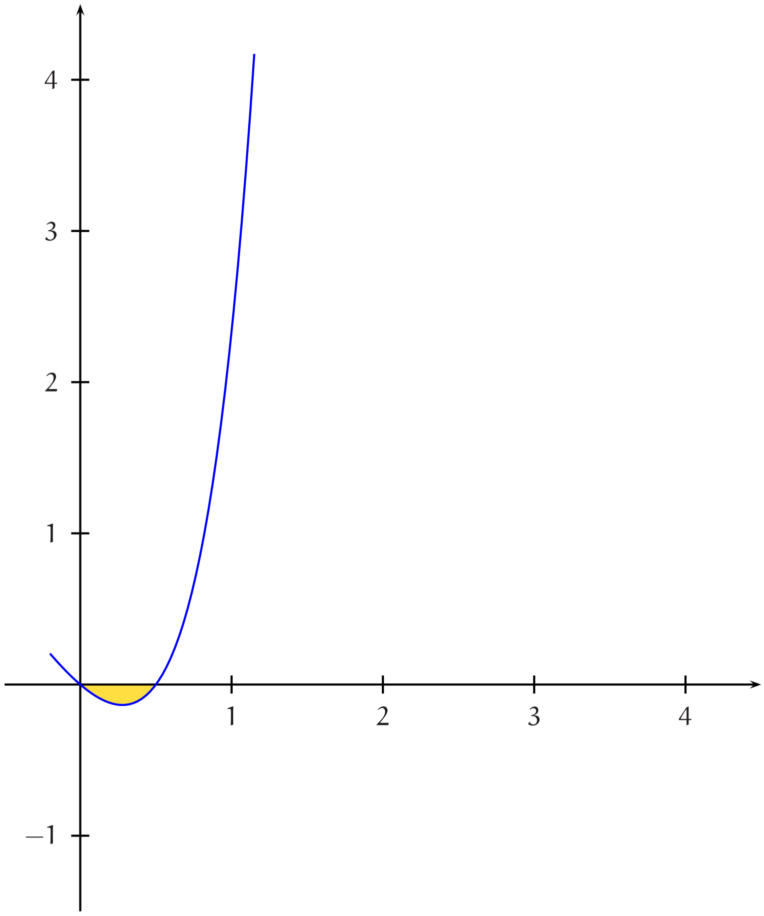
Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx - \frac{e}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{8} - \frac{e}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16}.$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{2-e}{16}.}$$

b) D'après la question 1), la fonction h est négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. L'aire demandée est donc

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{e-2}{16} = 0,04\ldots.$$



EXERCICE 4
Partie I Restitution organisée de connaissances

Soient α et β deux nombres complexes, α étant non nul puis S la similitude directe d'expression complexe $z' = \alpha z + \beta$. On note a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D.

$$\left\{\begin{array}{l} S(A) = B \\ S(C) = D \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha a + \beta = b \\ \alpha c + \beta = d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha a + \beta = b \\ \alpha(c-a) = d-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d-b}{c-a} \\ \dfrac{d-b}{c-a}a + \beta = b \end{array}\right. \text{(car } c \neq a\text{)}$$

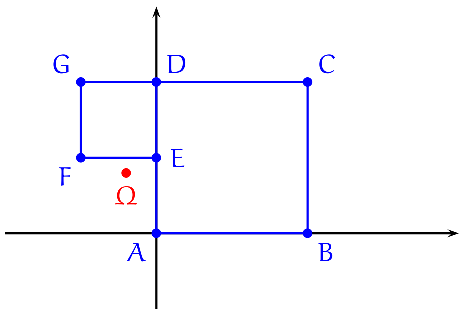
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d-b}{c-a} \\ \beta = b - a\dfrac{d-b}{c-a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d-b}{c-a} \\ \beta = \dfrac{bc-ab+ab-ad}{c-a} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d-b}{c-a} \\ \beta = \dfrac{bc-ad}{c-a} \end{array}\right. .$$

On ainsi montré l'existence et l'unicité des deux nombres complexes α et β et donc l'existence et l'unicité de la similitude directe S.

$$\boxed{\text{Si } A \neq C \text{ et } B \neq D\text{, il existe une unique similitude directe } S \text{ telle que } S(A) = B \text{ et } S(C) = D.}$$

Partie II

1) a)



b) $a = 0$. Ensuite, $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD}$ et les coordonnées de B sont $(1, 0)$ ou encore $b = 1$. De même, les coordonnées de D sont $(0, 1)$ et donc $d = i$.
Ensuite $ABCD$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD}$. Les coordonnées du point C sont $(1, 1)$ ou encore $c = 1 + i$.
E est le milieu du segment $[AD]$ et donc $e = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{i}{2}$. Ensuite, $ED = EF$ et $\left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Par suite, F est l'image de D par la rotation de centre E et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Donc,

$$f = e + e^{i\pi/2}(d-e) = \frac{i}{2} + i \times \frac{i}{2} = \frac{-1+i}{2},$$

et enfin, puisque $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EF}$, $g = d + (f - e) = -\dfrac{1}{2} + i$.

$$\boxed{a = 0,\ b = 1,\ c = 1+i,\ d = i,\ e = \frac{i}{2},\ f = -\frac{1+i}{2} \text{ et } g = -\frac{1}{2} + i.}$$

c) Puisque $D \neq B$ et $F \neq D$, il existe une unique similitude directe s telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.

2) a) $\dfrac{d-f}{b-d} = \dfrac{i - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right)}{1-i} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{i(-i+1)}{1-i} = \dfrac{i}{2}$.
Donc $k = \dfrac{FD}{DB} = \left|\dfrac{d-f}{b-d}\right| = \dfrac{1}{2}$ et $\theta = \left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FD}\right) = \arg\left(\dfrac{d-f}{b-d}\right) = \arg\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

$$\boxed{s \text{ est une similitude directe de rapport } \frac{1}{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

b) Notons $z' = \alpha z + \beta$ l'écriture complexe de z. les calculs généraux effectués dans la partie II fournissent $\alpha = \dfrac{d-f}{b-d} = \dfrac{i}{2}$ et

$$\beta = \frac{fb - d^2}{b-d} = \frac{\dfrac{-1+i}{2} \times 1 - i^2}{1-i} = \frac{1}{2} \times \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2} \times \frac{i(-i+1)}{1-i} = \frac{i}{2}.$$

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}.}$$

c) Le centre Ω de s est son point invariant. Or

$$z = \frac{i}{2}z + \frac{i}{2} \Leftrightarrow (2-i)z = i \Leftrightarrow z = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{5}.$$

On a montré que

$$\boxed{s \text{ est la similitude directe de centre } \Omega\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \text{ de rapport } \frac{1}{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

