BACCALAUREAT GENERAL

Session d'avril 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Rochambeau

EXERCICE 1

1. a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, -4, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-5, 2, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors on a à la fois $-3k = -5$ et $-4k = 2$ ou encore $k = \frac{5}{3}$ et $k = -\frac{1}{2}$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times (-3) - 1 \times (-4) - 1 \times 1 = -3 + 4 - 1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times (-5) - 1 \times 2 - 1 \times (-7) = -5 - 2 + 7 = 0$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux droites sécantes du plan (ABC) et donc

le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Le plan (ABC) est le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - (-2)) - 1 \times (z - 4) = 0$ ou encore $x - y - z + 1 = 0$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $-x + y + z = 1$.

2. a) La droite passant par O est orthogonale au plan (ABC) est la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Une représentation paramétrique de cette droite est $\begin{cases} x = k \\ y = -k \\ z = -k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}$ cette droite.

b) Le point O' est l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC). Soit $M(k, -k, -k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow -k - k - k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

Quand $k = -\frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point O' : $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Les coordonnées de O' sont $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. a) Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$. On a

$$\begin{aligned} t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 &= \left(t\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} \text{ (car } \overrightarrow{OH} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux).} \end{aligned}$$

Puisque $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \neq 0$, on a montré que

$$t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}.$$

b) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = (0-(-2))(-4-(-2)) + (0-(-6))(0-(-6)) + (0-5)(-3-5) = -4+36+40 = 72$.
Puis $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = (-4-(-2))^2 + (0-(-6))^2 + (-3-5)^2 = 4+36+64 = 104$ et donc $t = \dfrac{72}{104} = \dfrac{9}{13}$.

Les coordonnées du point H sont $\left(x_B + tx_{\overrightarrow{BC}}, y_B + ty_{\overrightarrow{BC}}, z_B + tz_{\overrightarrow{BC}}\right)$ ou encore $\left(-2+\dfrac{9}{13}\times(-2), -6+\dfrac{9}{13}\times 6, 5+\dfrac{9}{13}\times(-8)\right)$ ou enfin $\left(-\dfrac{44}{13}, -\dfrac{24}{13}, -\dfrac{7}{13}\right)$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } H \text{ sont } \left(-\dfrac{44}{13}, -\dfrac{24}{13}, -\dfrac{7}{13}\right).}$$

EXERCICE 2

1. On note R l'événement « la boule tirée est rouge » et U l'événement « la boule tirée porte le n° 1 ». L'événement « la boule tirée est verte » est l'événement $\overline{R}$ et l'événement « la boule tirée porte le n° 2 » est l'événement $\overline{U}$.
L'énoncé donne $p(R \cap U) = p(U) = 0,2$ et donc $p(\overline{U}) = 1 - p(U) = 0,8$ puis $p_{\overline{U}}(R) = 0,1$. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$p(R) = p(R \cap U) + p(R \cap \overline{U}) = p(R \cap U) + p(\overline{U}) \times p_{\overline{U}}(R) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que la boule tirée soit rouge est } 0,28.}$$

2. La probabilité demandée est $p_R(\overline{U})$.

$$p_R(\overline{U}) = \frac{p(R \cap \overline{U})}{p(R)} = \frac{p(\overline{U}) \times p_{\overline{U}}(R)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,28} = \frac{0,08}{0,28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que la boule tirée porte le n° 2 sachant qu'elle est rouge est } \frac{2}{7}.}$$

3. a) Notons X le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- n expériences identiques et indépendantes (les tirages se faisant avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge et porte le n° 1 » avec une probabilité $p = 0,2$ ou son contraire avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant \ln(0,01) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des } n \text{ tirages} \\ \text{est supérieure ou égale à } 0,99 \text{ à partir de } n = 21.\end{array}}$$

EXERCICE 3

Partie A

1. $16 \times 1 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$. Donc le couple $(x_0, y_0) = (1, 4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$16x - 3y = 4 \Leftrightarrow 16x - 3y = 16x_0 - 3y_0 \Leftrightarrow 16(x - x_0) = 3(y - y_0).$$

Si (x, y) est solution de l'équation (E), puisque l'entier 3 divise l'entier $3(y - y_0)$, l'entier 3 divise encore l'entier $16(x - x_0)$. Mais les entiers 3 et 16 sont premiers entre eux (car 3 et $16 = 2^4$ n'ont pas de facteur premier commun) et donc l'entier 3 divise l'entier $x - x_0$ d'après le théorème de Gauss. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore $x = x_0 + 3k$. De même, l'entier 16 divise $y - y_0$ et il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 16k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 3k$ et $y = y_0 + 16k'$.

$$16x - 3y = 16(x_0 + 3k) - 3(y_0 + 16k') = 16x_0 - 3y_0 + 48(k - k') = 4 + 48(k - k'),$$

et donc $16x - 3y = 4 \Leftrightarrow 48(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'$.

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(1 + 3k, 4 - 16k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1. f est une similitude plane directe de centre O. Son rapport est $\lambda = \left|\sqrt{2}e^{3i\pi/8}\right| = \sqrt{2}\left|e^{3i\pi/8}\right| = \sqrt{2}$ et son angle est $\theta = \arg\left(\sqrt{2}e^{3i\pi/8}\right) = \arg\left(e^{3i\pi/8}\right) = \dfrac{3\pi}{8}$.

f est la similitude plane directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2. a) g est la similitude plane directe de centre O, de rapport $\lambda' = \lambda^4 = 4$ et d'angle $\theta' = 4\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ ou aussi $-\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit encore que l'expression complexe de g est $z' = 4e^{-i\pi/2}z$ ou encore $z' = -4iz$.

b) Soit n un entier naturel. Puisque $M_{n+4} = f(f(f(f(M_n)))) = g(M_n)$,
- $OM_{n+4} = g(O)g(M_n) = \lambda' OM_n = 4OM_n$.
- $\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{Og(M_n)}\right) = \theta' = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

c) Voir figure à la fin. Le point M_4 vérifie $OM_4 = 4OM_0 = 4$ et $\left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc $z_4 = 4$.

De même, le point M_5 vérifie $OM_5 = 4OM_1$ et $\left(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_5}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Sur la figure, on a laissé apparent les traits de construction du point M_5.

3. Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \sqrt{2}e^{3i\pi/8}z_n$. Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $z_0 = i = e^{i\pi/2}$ et de raison $q = \sqrt{2}e^{3i\pi/8}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$z_n = z_0 q^n = e^{i\pi/2}\left(\sqrt{2}e^{3i\pi/8}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}.$$

4. a) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

$$\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \arg\left(\frac{z_n}{z_p}\right) = \arg\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}}{\left(\sqrt{2}\right)^p e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3p\pi}{8}\right)}}\right) = \arg\left(\left(\sqrt{2}\right)^{n-p} e^{i\frac{3(n-p)\pi}{8}}\right) = \frac{3(n-p)\pi}{8}\ [2\pi].$$

b) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

$$\begin{aligned} O,\ M_n \text{ et } M_p \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{3(n-p)\pi}{8} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3(n-p) = 8k \Leftrightarrow 3(n-p) \text{ est un multiple de } 8. \end{aligned}$$

Maintenant, si $n - p$ est un multiple de 8, alors $3(n - p)$ est un multiple de 8. Réciproquement, si $3(n - p)$ est un multiple de 8, alors 8 divise $3(n - p)$ et donc 8 divise $n - p$ d'après le théorème de Gauss car 3 et 8 sont premiers entre eux. En résumé, $3(n - p)$ est un multiple de 8 si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8 et finalement

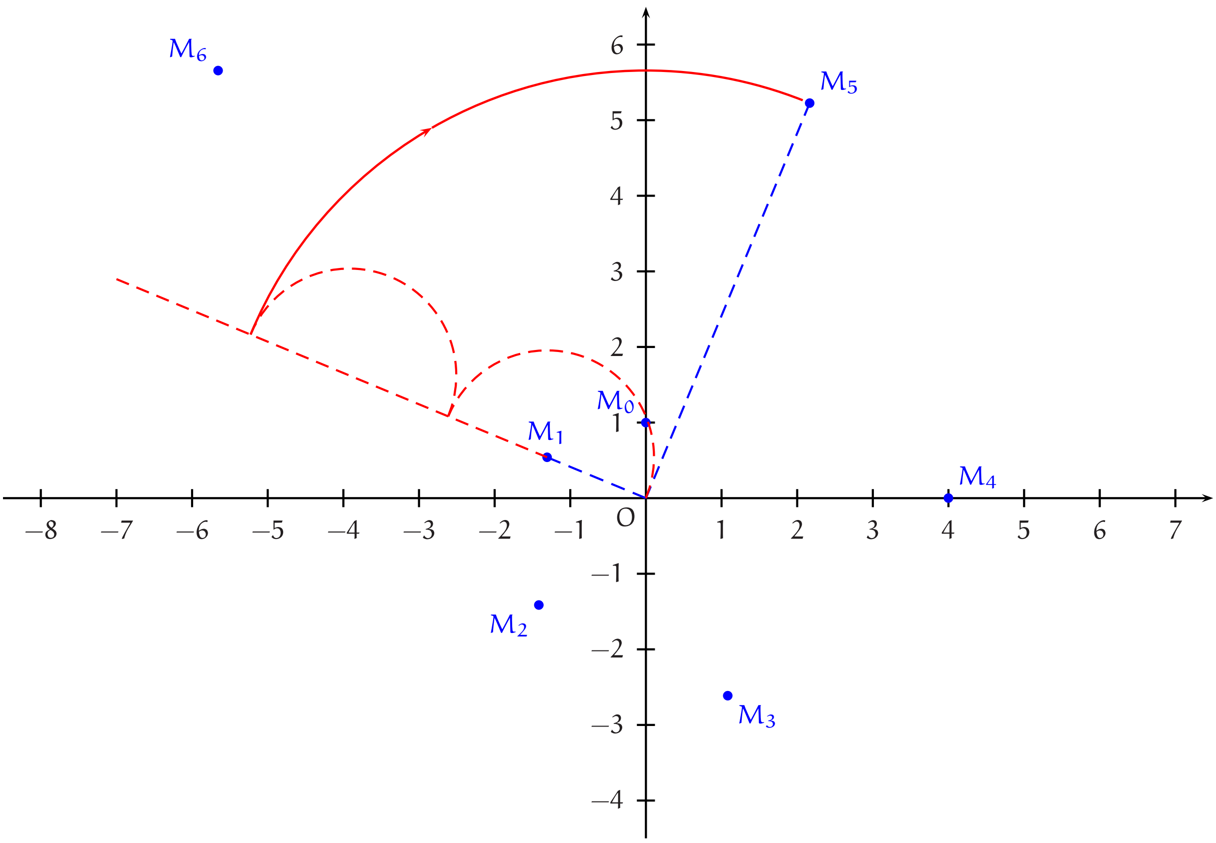
O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

5. Soit n un entier naturel.

$$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow z_n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}/\ \frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8} = 2q\pi \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}/\ -3n + 16q = 4.$$

D'après la partie A, n est de la forme $4 - 16k$, $k \in \mathbb{Z}$, puis $n = 4 + 16k'$, $k' \in \mathbb{N}$, car $n \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si n est de la forme $4 + 16k$, $k \in \mathbb{N}$, alors $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3(4+16k)\pi}{8}\right)} = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i(2\pi+6k\pi)} = \left(\sqrt{2}\right)^n$ et donc $z_n \in \mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ M_n \in [Ox) \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 4 + 16k.}$



EXERCICE 4

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \neq 0$ et $e^x + 7 \neq 0$ puis $f_1(x) = \dfrac{4e^x}{e^x+7} = \dfrac{4e^x}{e^x\left(1+\dfrac{7}{e^x}\right)} = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}.}$$

2. a) • $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 7 = 7$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+7} = 0$. On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+7e^{-x} = 1$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{1+7e^{-x}} = 4$. On en déduit que la droite d'équation $y = 4$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

b) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 4\frac{-(1+7e^{-x})'}{(1+7e^{-x})^2} = 4\frac{-(-7e^{-x})}{(1+7e^{-x})^2} = \frac{28e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2} > 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

c) Puisque la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, on a $\lim\limits_{t\to-\infty} f_1(t) < f_1(x) < \lim\limits_{t\to+\infty} f_1(t)$ ou encore $0 < f_1(x) < 4$.

3. a) Soit x un réel. Alors, $2x_{I_1} - x \in \mathbb{R}$ et

$$f_1(2x_{I_1} - x) = \frac{4}{1+7e^{-(2\ln 7 - x)}} = \frac{4}{1+7(e^{\ln 7})^{-2}e^x} = \frac{4}{1+\dfrac{e^x}{7}} = \frac{28}{e^x+7},$$

puis

$$f_1(2x_{I_1} - x) + f_1(x) = \frac{28}{e^x+7} + \frac{4e^x}{e^x+7} = \frac{4(e^x+7)}{e^x+7} = 4 = 2y_{I_1}.$$

En résumé, pour tout réel x, $f_1(2x_{I_1} - x) + f_1(x) = 2y_{I_1}$ et donc

$$\boxed{\text{le point } I_1(\ln 7, 2) \text{ est centre de symétrie de } C_1.}$$

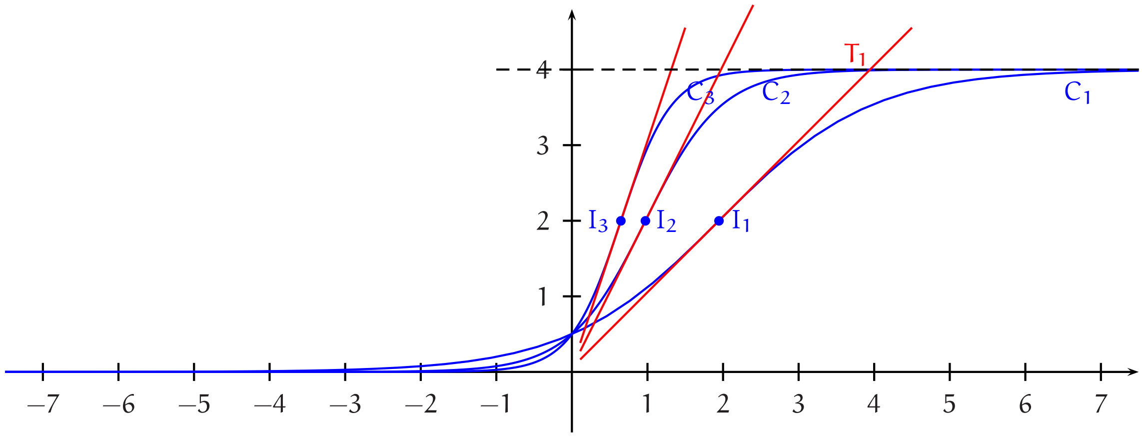
b) Une équation de la tangente à la courbe C_1 en I_1 est $y = f_1'(x_{I_1})(x - x_{I_1}) + f_1(x_{I_1})$ avec

- $x_{I_1} = \ln 7$,
- $f_1(x_{I_1}) = \dfrac{4e^{\ln 7}}{e^{\ln 7}+7} = \dfrac{28}{14} = 2$,
- $f_1'(x_{I_1}) = \dfrac{28e^{-\ln 7}}{(1+7e^{-\ln 7})^2} = \dfrac{\dfrac{28}{7}}{\left(1+\dfrac{7}{7}\right)^2} = 1$.

Une équation de la tangente à la courbe C_1 en I_1 est donc $y = x - \ln 7 + 2$.

$$\boxed{\text{Une équation de la tangente à la courbe } C_1 \text{ en } I_1 \text{ est donc } y = x - \ln 7 + 2.}$$

c) Représentation graphique.



4. a) La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4(e^x+7)'}{e^x+7}$ avec pour tout réel x, $e^x + 7 > 0$. Donc une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F_1 \ : \ x \mapsto 4\ln(e^x + 7)$.

b) La valeur moyenne de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0, \ln 7]$ est :

$$\frac{1}{\ln 7}\int_0^{\ln 7} f_1(x)\ dx = \frac{1}{\ln 7}\left[4\ln(e^x+7)\right]_0^{\ln 7} = \frac{4}{\ln 7}(\ln(e^{\ln 7}+7) - \ln(e^0+7)) = 4\frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.$$

$$\boxed{\text{La valeur moyenne de la fonction } f_1 \text{ sur l'intervalle } [0, \ln 7] \text{ est } 4\frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.}$$

Partie B

1. Soit n un entier naturel non nul. $f_n(0) = \dfrac{4e^0}{e^0+7} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \text{ le point } A\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ appartient à la courbe } C_n.}$$

2. a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x,

$$f_n(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} = 2 \Leftrightarrow 4e^{nx} = 2(e^{nx}+7) \Leftrightarrow 2e^{nx} = 14 \Leftrightarrow e^{nx} = 7 \Leftrightarrow nx = \ln 7 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 7}{n}.$$

$$\boxed{I_n\left(\frac{\ln 7}{n}, 2\right).}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x_{I_n} = \dfrac{\ln 7}{n}$, $f\left(x_{I_n}\right) = 2$. Ensuite, pour tout réel x,

$$f_n'(x) = 4\frac{ne^{nx}(e^{nx}+7) - e^{nx}(ne^{nx})}{(e^{nx}+7)^2} = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$$

et donc $f'\left(x_{I_n}\right) = \dfrac{28ne^{n\frac{\ln 7}{n}}}{\left(e^{n\frac{\ln 7}{n}}+7\right)^2} = \dfrac{28 \times 7n}{(7+7)^2} = n.$

Une équation de T_n est donc $y = n\left(x - \dfrac{\ln 7}{n}\right) + 2$ ou encore $y = nx - \ln 7 + 2$.

c) Voir graphique.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{4}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} \frac{ne^{nx}}{e^{nx}+7}\ dx = \frac{4}{\ln 7}\left[\ln(e^{nx}+7)\right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} = \frac{4}{\ln 7}\left(\ln(e^{\ln 7}+7) - \ln(e^0+7)\right) = 4\frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n = 4\frac{\ln 14 - \ln 8}{\ln 7}.}$$

