Antilles Guyane 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2

1) On note (E) l'équation proposée. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 16 = 16 \times 3 - 4 \times 16 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i$.

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \text{ sont } z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i.}$$

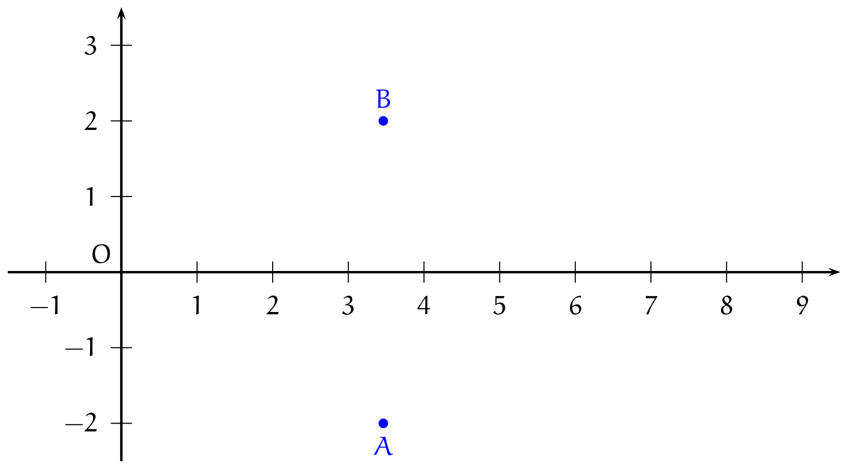
2) a) $|a| = \left|2\sqrt{3} - 2i\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$a = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

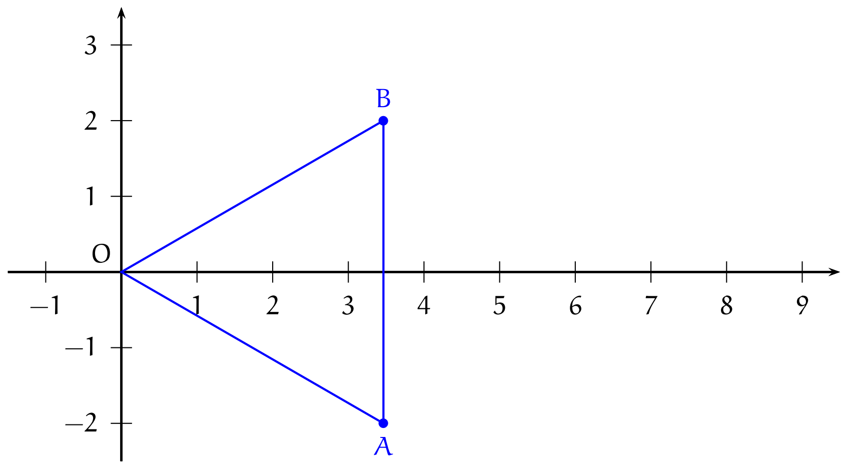
$$\boxed{a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b)



c) On a déjà $OA = |a| = 4$ et $OB = |b| = 4$. Ensuite, $AB = |b - a| = |4i| = 4$. Donc $OA = OB = AB$ et

$$\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}}$$

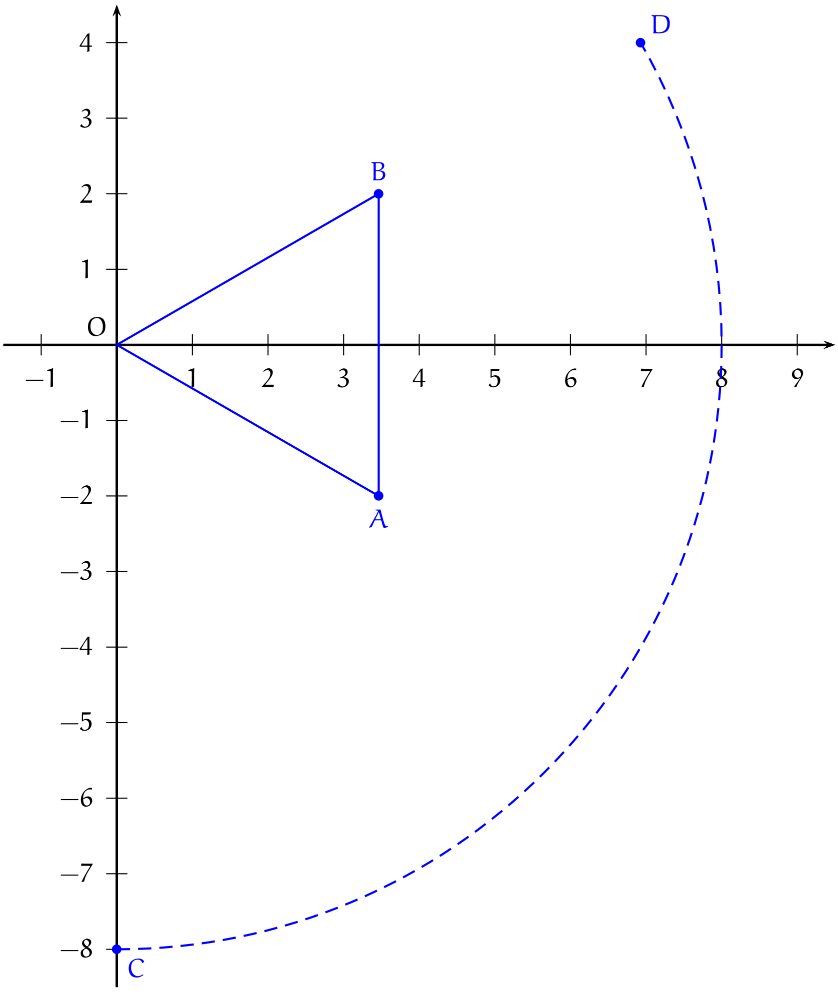


3) a)

$$d = e^{\frac{2i\pi}{3}}c = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \times (-8i) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-8i) = 4i + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

$$\boxed{d = 4\sqrt{3} + 4i.}$$

b) $|d| = |c| = 8$ et $\arg(d) = \arg(c) + \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. Donc le point D est un obtenu en faisant tourner le point C autour de O d'un angle de $\dfrac{2\pi}{3}$.

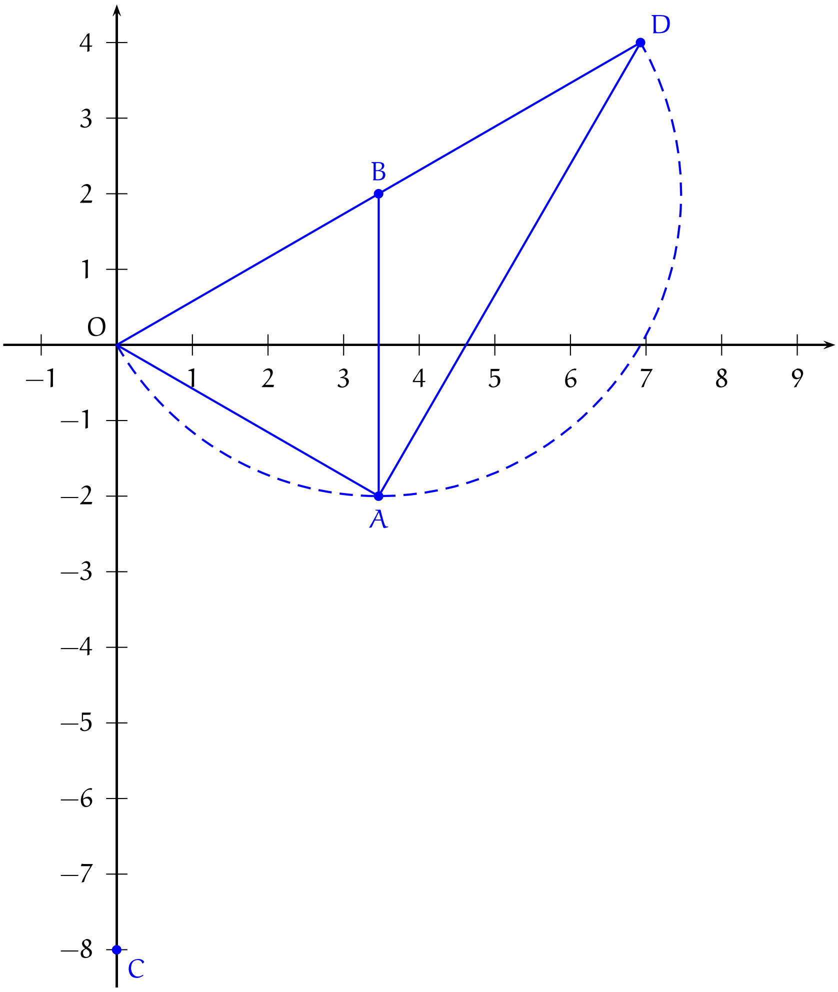


4) On a $b = 2\sqrt{3} + 2i$ et $d = 4\sqrt{3} + 4i$. Donc, $d = 2b$ puis $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires

$$\boxed{\text{les points O, B et D sont alignés.}}$$

5) Puisque $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB}$, B est le milieu du segment [OD]. Puisque le triangle OAB est équilatéral, $BA = BO$.
Par suite, le point A est sur le cercle de centre B passant par O ou encore A est sur le cercle de diamètre [OD]. On sait alors que

$$\boxed{\text{le triangle OAD est rectangle en A.}}$$


D
B
A
C
O
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

