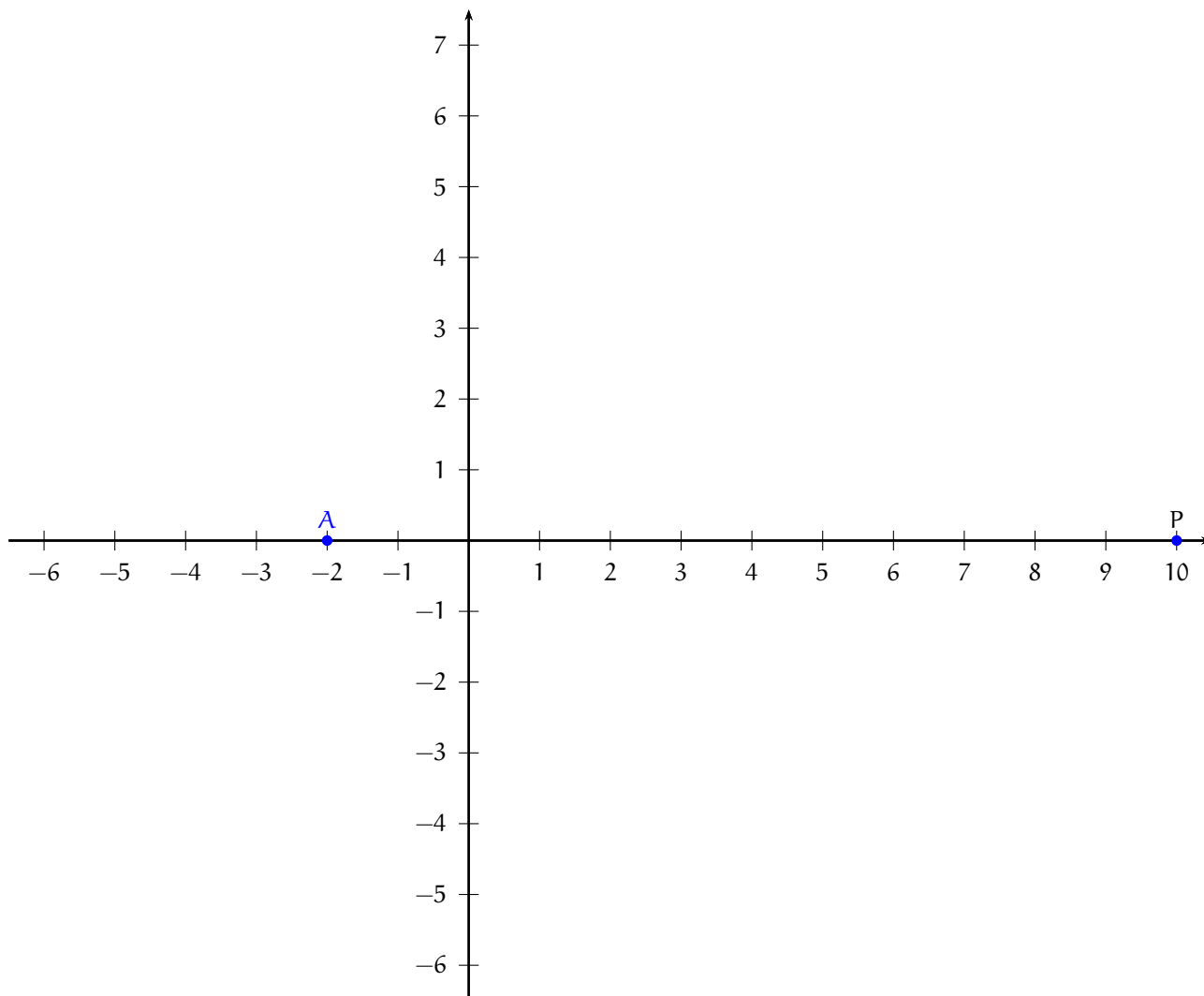


Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

PARTIE A. Etude de la configuration

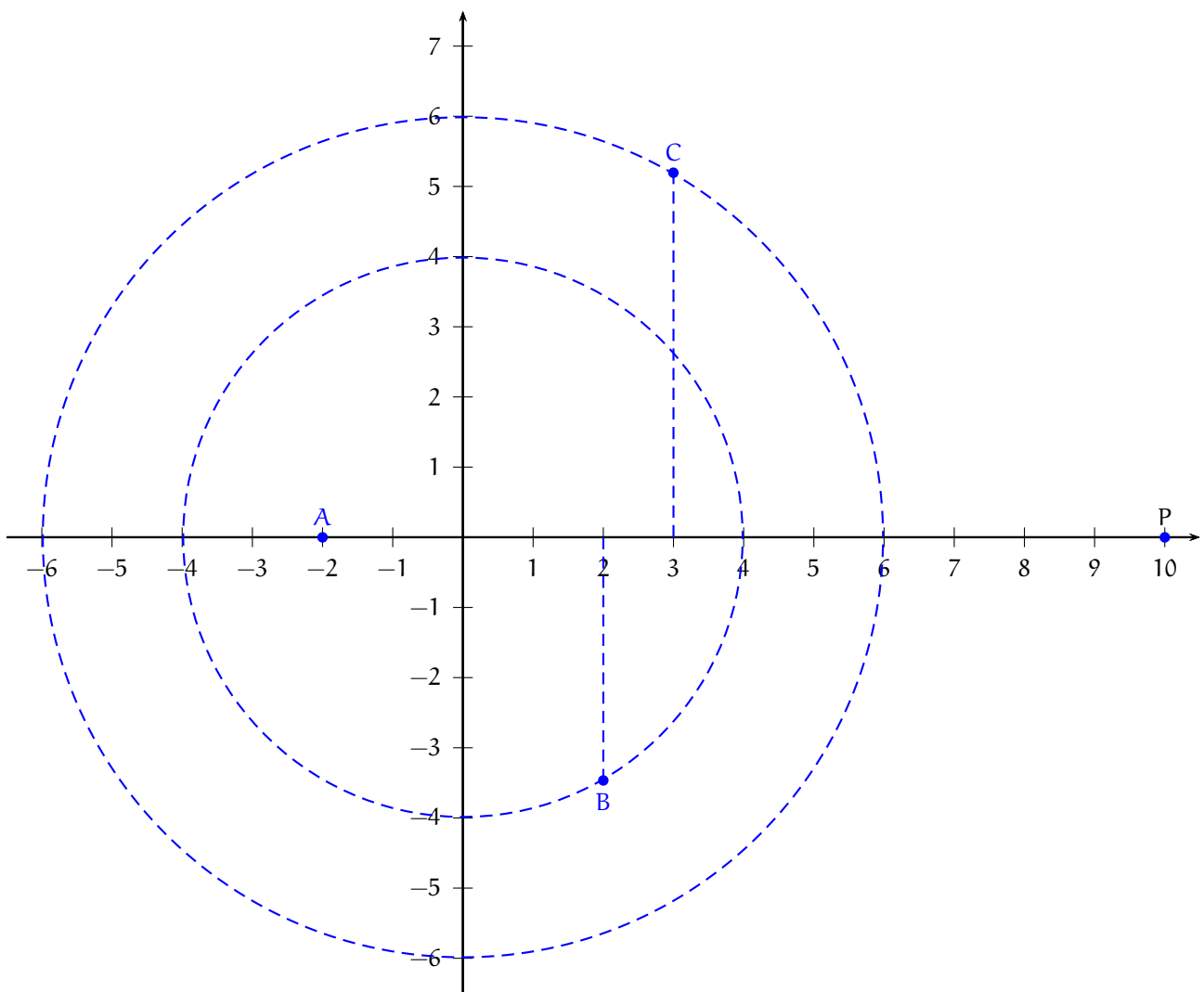
1) a)



b) $|b| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$ et $|c| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$.

$OB = |b| = 4$ et $OC = |c| = 6$.

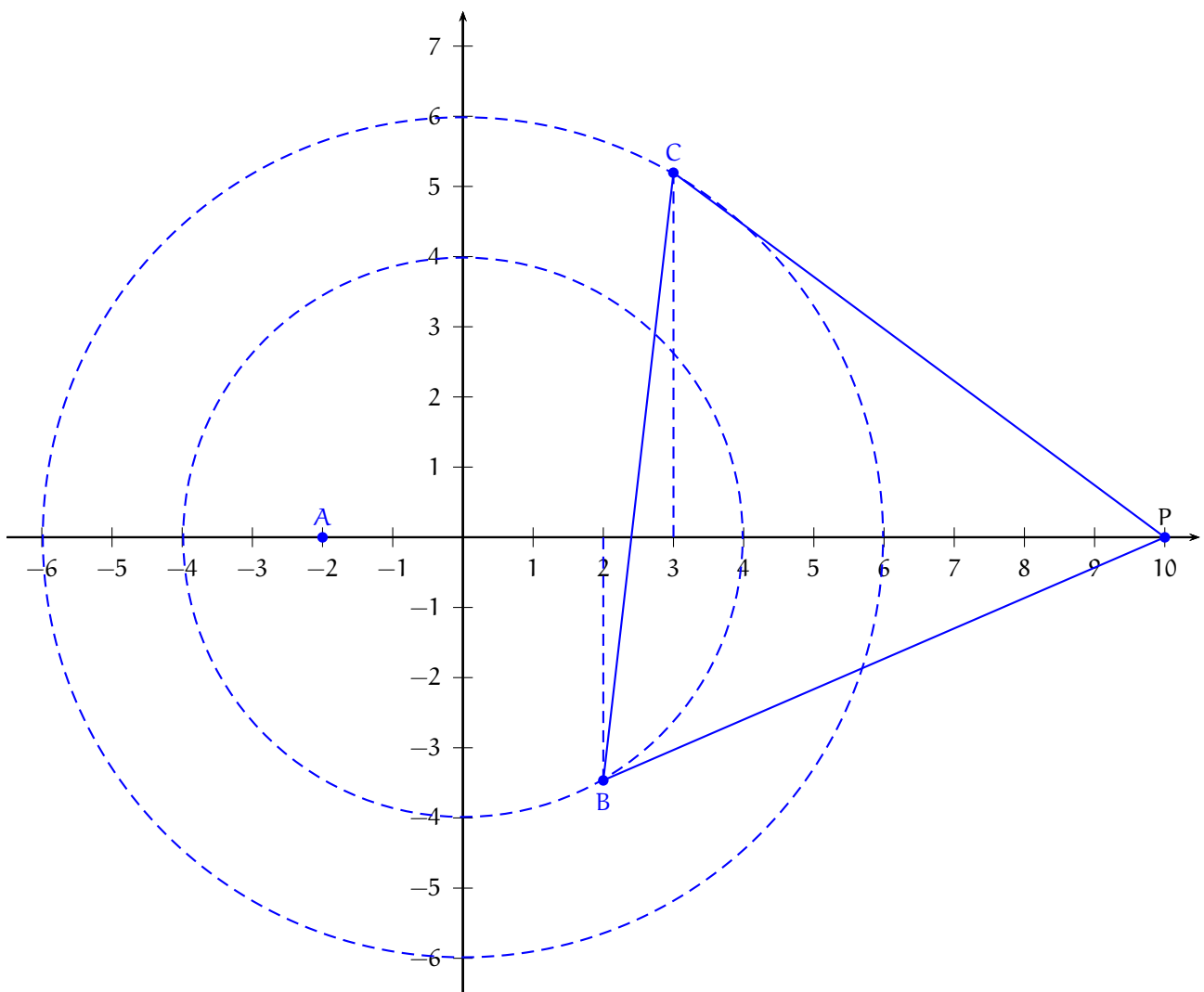
c) B est le point du cercle de centre O et de rayon 4 dont l'abscisse est égale à 2 et l'ordonnée est négative.
C est le point du cercle de centre O et de rayon 6 dont l'abscisse est égale à 3 et l'ordonnée est positive.



- 2) • $BC = |c - b| = |1 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 75} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.
- $BP = |p - b| = |8 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 12} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.
- $CP = |p - c| = |7 - 3i\sqrt{3}| = \sqrt{7^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{49 + 27} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

Donc $BC = BP = CP$ et finalement

Le triangle BCP est équilatéral.



3)

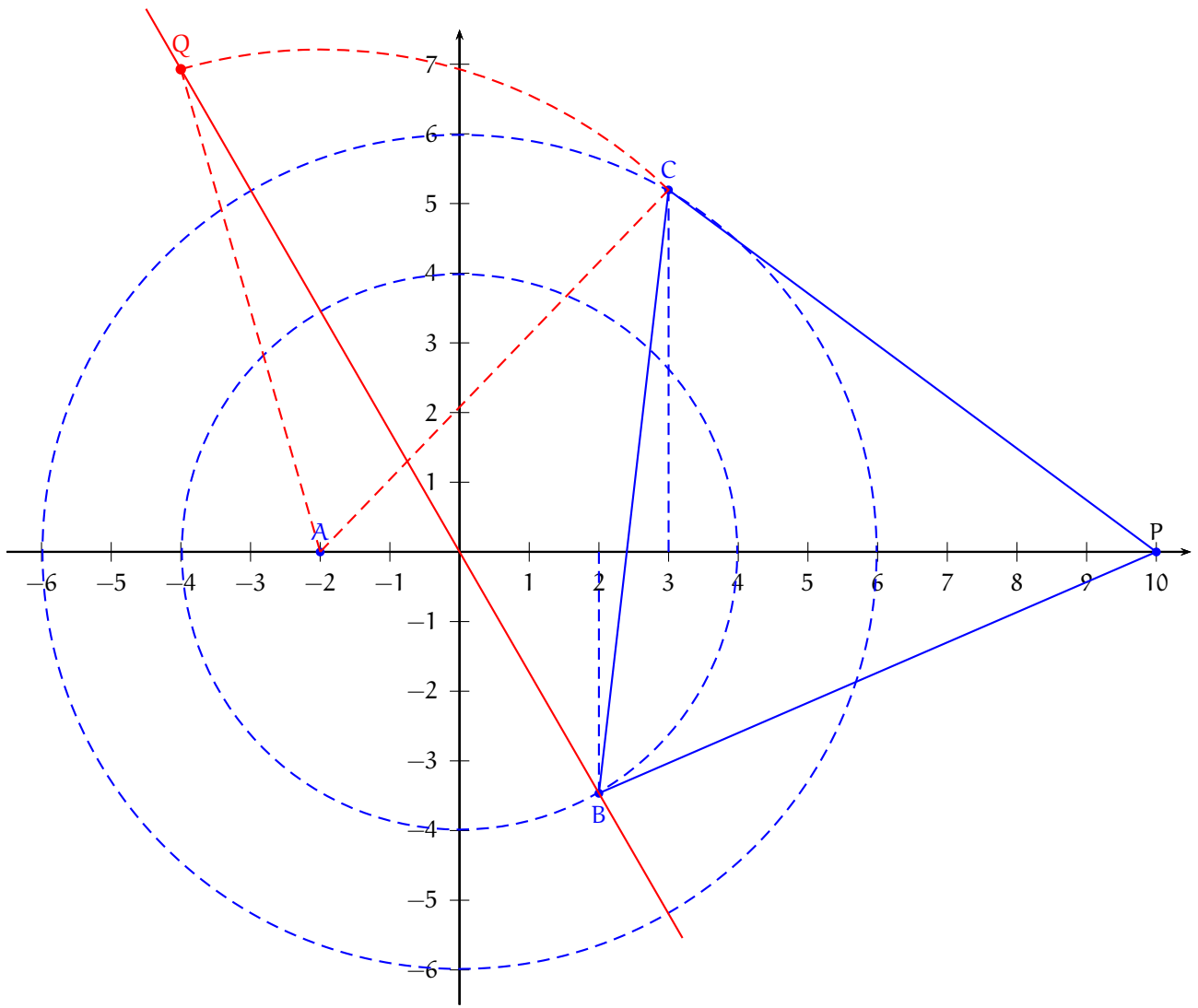
$$\begin{aligned}
 q &= a + e^{i\pi/3}(c - a) = a + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) (c - a) \\
 &= -2 + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (3 + 3i\sqrt{3} + 2) = -2 + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (5 + 3i\sqrt{3}) \\
 &= -2 + \frac{5}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} + i \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} = -2 - \frac{4}{2} + i \frac{8\sqrt{3}}{2} \\
 &= -4 + 4i\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Donc

$$q = -4 + 4i\sqrt{3}.$$

b) On a encore $q = -2(2 - 2i\sqrt{3}) = -2b$ ou aussi $\vec{OQ} = -2\vec{OB}$.
Ainsi, les vecteurs \vec{OQ} et \vec{OB} sont colinéaires et donc

les points O, B et Q sont alignés.

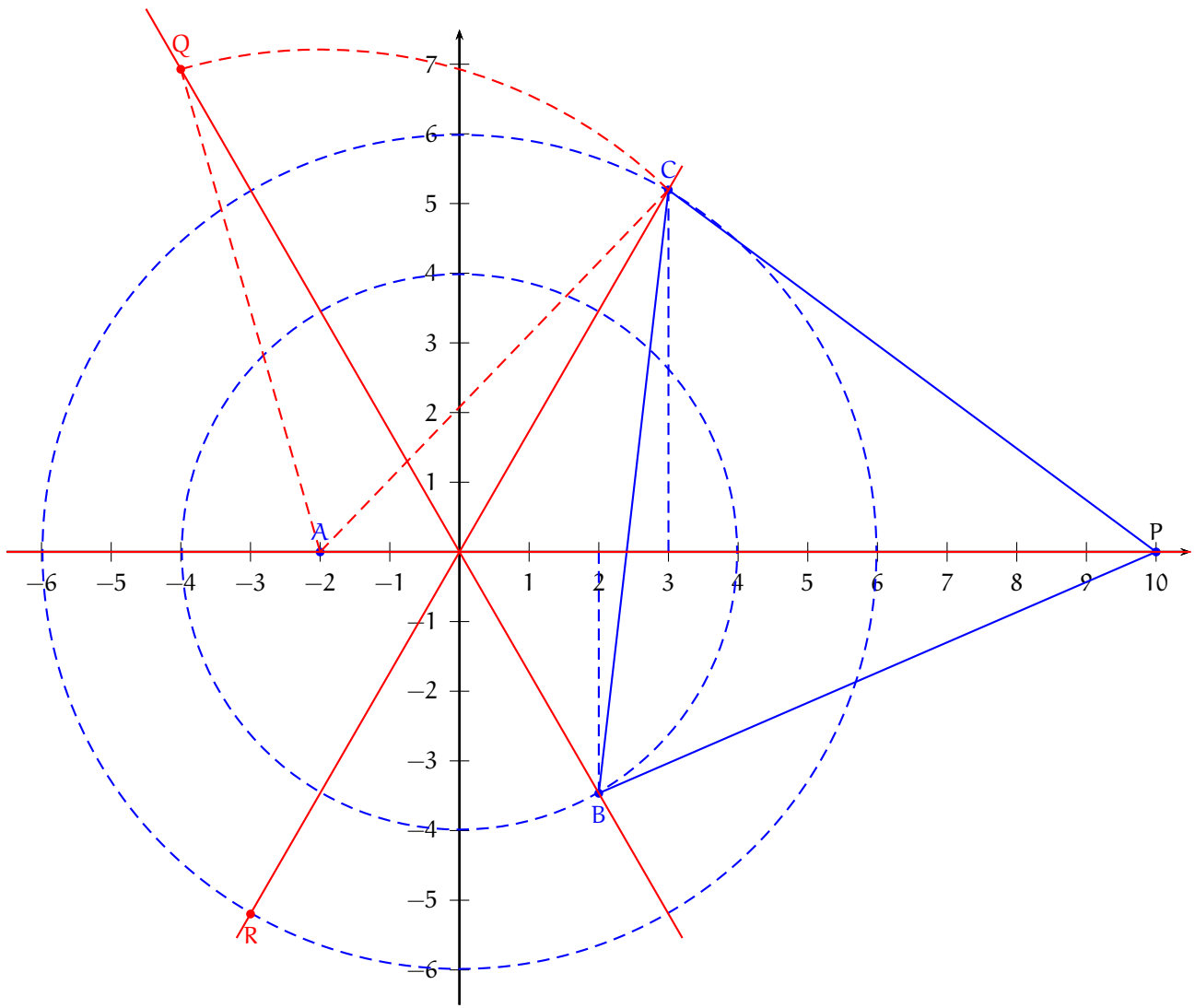


4) a) • Les points A et P sont sur l'axe des abscisses de même que le point O. Donc le point O appartient à la droite (AP).

- D'après la question précédente, le point O appartient à la droite (BQ).
- Puisque R est le symétrique de C par rapport à O, le point O est le milieu du segment [CR] et en particulier, le point O appartient à la droite (CR).

On a montré que

Les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.



- b) • $AP = |p - a| = 12$,
 • $BQ = |q - b| = \left| (-4 + 4i\sqrt{3}) - (2 - 2i\sqrt{3}) \right| = |-6 + 6i\sqrt{3}| = 6\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 12$,
 • $CR = 2OC = 2|c| = 12$ (d'après la question 1)b).

Donc,

$$\boxed{AP = BQ = CR = 12.}$$

PARTIE B

1) D'après la question 1)b) de la partie A, $f(O) = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 2 + 4 + 6 = 12$.

$$\boxed{f(O) = 12.}$$

2) Soit M un point du plan. Si $M = A$, alors $N = A$ et donc $AM = MN = 0$. Si $M \neq A$, le triangle AMN est équilatéral et donc $AM = MN$.

Ensuite, puisque $q = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ et $n = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a)$,

$$\begin{aligned} NQ &= |q - n| = \left| (a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)) - (a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a)) \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}}c - e^{i\frac{\pi}{3}}m \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a) \right| \\ &= \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| \times |m - a| = MC. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA = MN \text{ et } MC = NQ.}$$

3) Soit M un point du plan. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f(M) &= MA + MB + MC = MN + MB + NQ = BM + MN + NQ \\ &\geq BQ = 12 \text{ (d'après la question A.4)b.)} \end{aligned}$$

Pour tout point M du plan, $f(M) \geq 12$.