Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \qquad b = 2 - 2i\sqrt{3}, \qquad c = 3 + 3i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad p = 10.$$

PARTIE A. Etude de la configuration

1) Construction de la figure.

a) Placer les points A et P dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2) Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3) Soit Q le point d'affixe q telle que $q = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c - a)$.

a) Vérifier que $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4) Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b) Etablir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1) Calculer $f(O)$.

2) Soit M un point quelconque d'affixe m. Soit N le point du plan d'affixe n telle que

$$n = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a).$$

On admet que si $M \neq A$, le point N est le point du plan tel que le triangle AMN soit équilatéral direct et si $M = A$, alors $N = A$.

Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geqslant 12$.

