Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \qquad b = 2 - 2i\sqrt{3}, \qquad c = 3 + 3i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad p = 10.$$

PARTIE A. Etude de la configuration

1) Construction de la figure.

a) Placer les points A et P dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2) Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3) Soit Q le point d'affixe q telle que $q = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c - a)$.

a) Vérifier que $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4) Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b) Etablir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1) Calculer $f(O)$.

2) Soit M un point quelconque d'affixe m. Soit N le point du plan d'affixe n telle que

$$n = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a).$$

On admet que si $M \neq A$, le point N est le point du plan tel que le triangle AMN soit équilatéral direct et si $M = A$, alors $N = A$.

Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

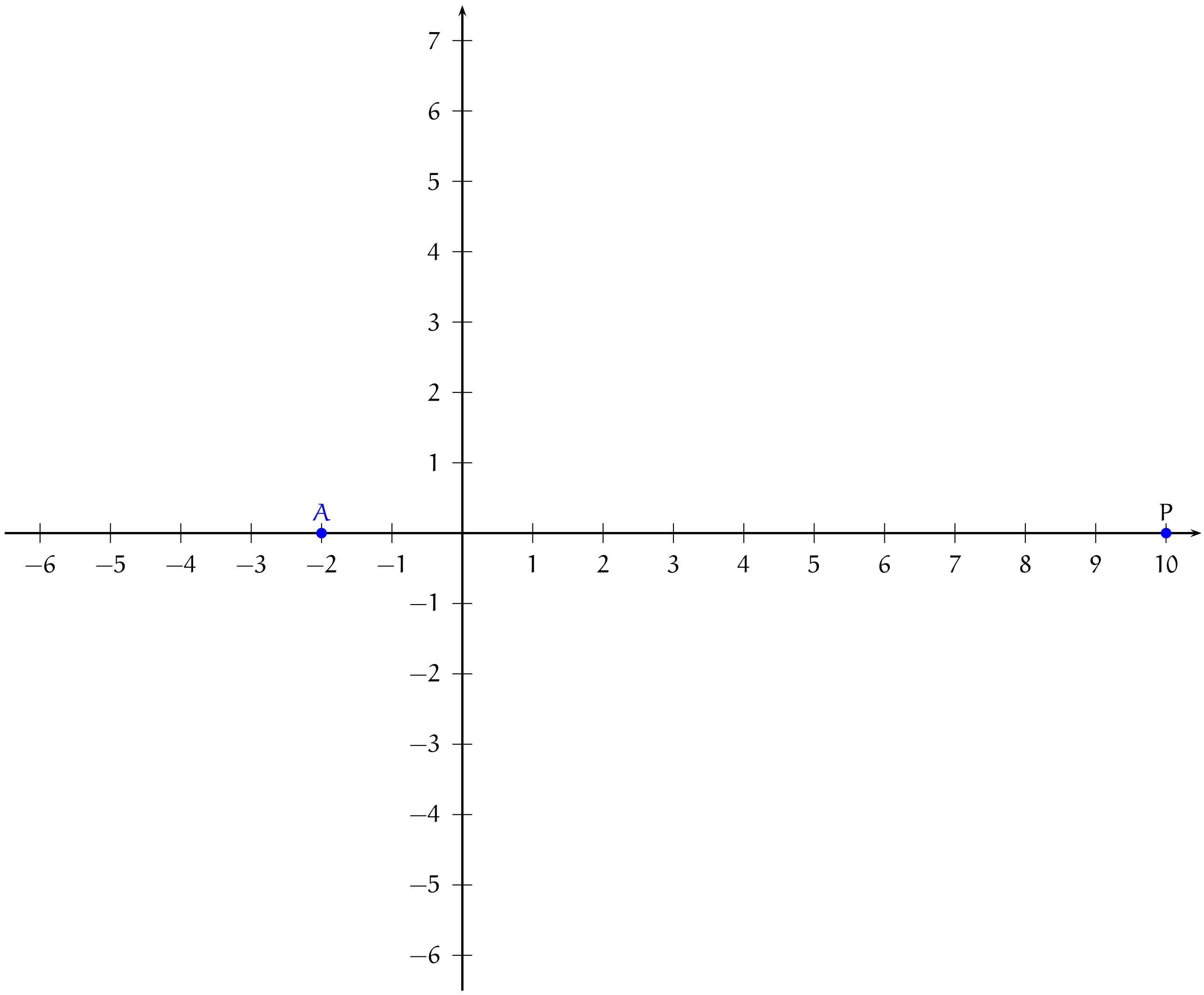
En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geqslant 12$.

Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

PARTIE A. Etude de la configuration

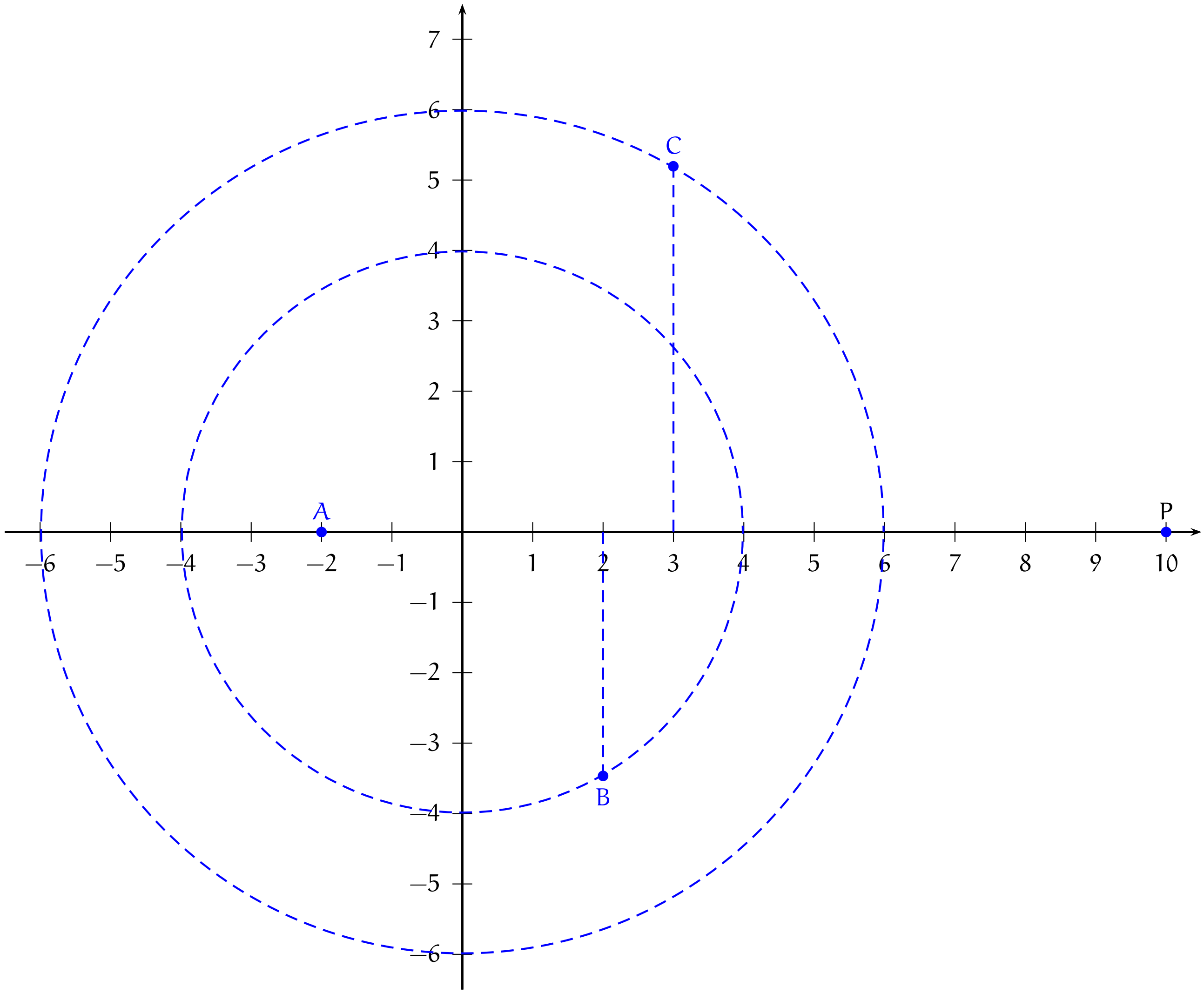
1) a)



b) $|b| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$ et $|c| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$.

$$\boxed{\mathrm{OB} = |b| = 4 \text{ et } \mathrm{OC} = |c| = 6.}$$

c) B est le point du cerlce de centre O et de rayon 4 dont l'abscisse est égale à 2 et l'ordonnée est négative.
C est le point du cercle de centre O et de rayon 6 dont l'abscisse est égale à 3 et l'ordonnée est positive.



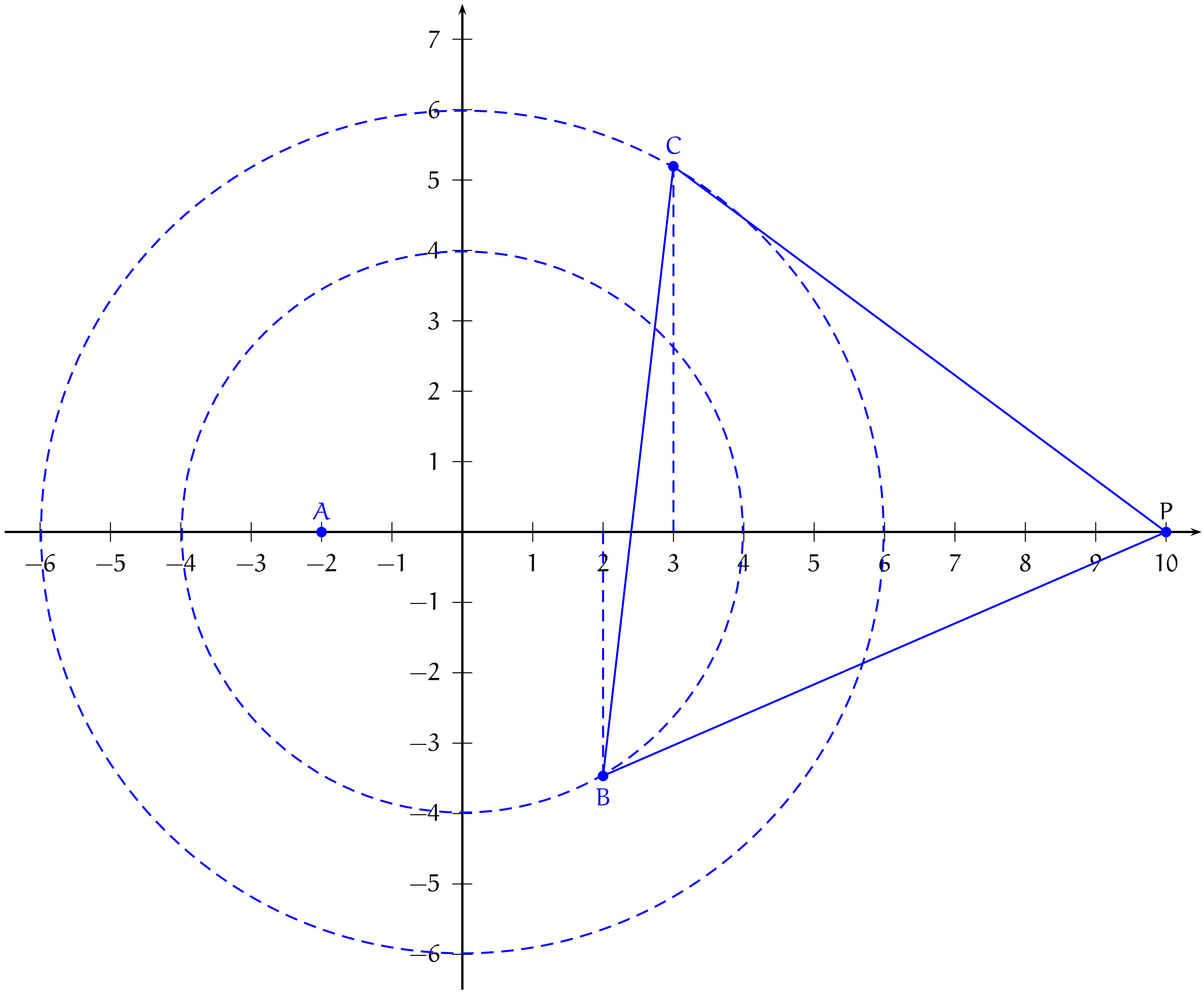
2) • $BC = |c - b| = \left|1 + 5i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 75} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $BP = |p - b| = \left|8 + 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{8^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 12} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $CP = |p - c| = \left|7 - 3i\sqrt{3}\right| = \sqrt{7^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{49 + 27} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

Donc $BC = BP = CP$ et finalement

$$\boxed{\text{Le triangle BCP est équilatéral.}}$$



3)

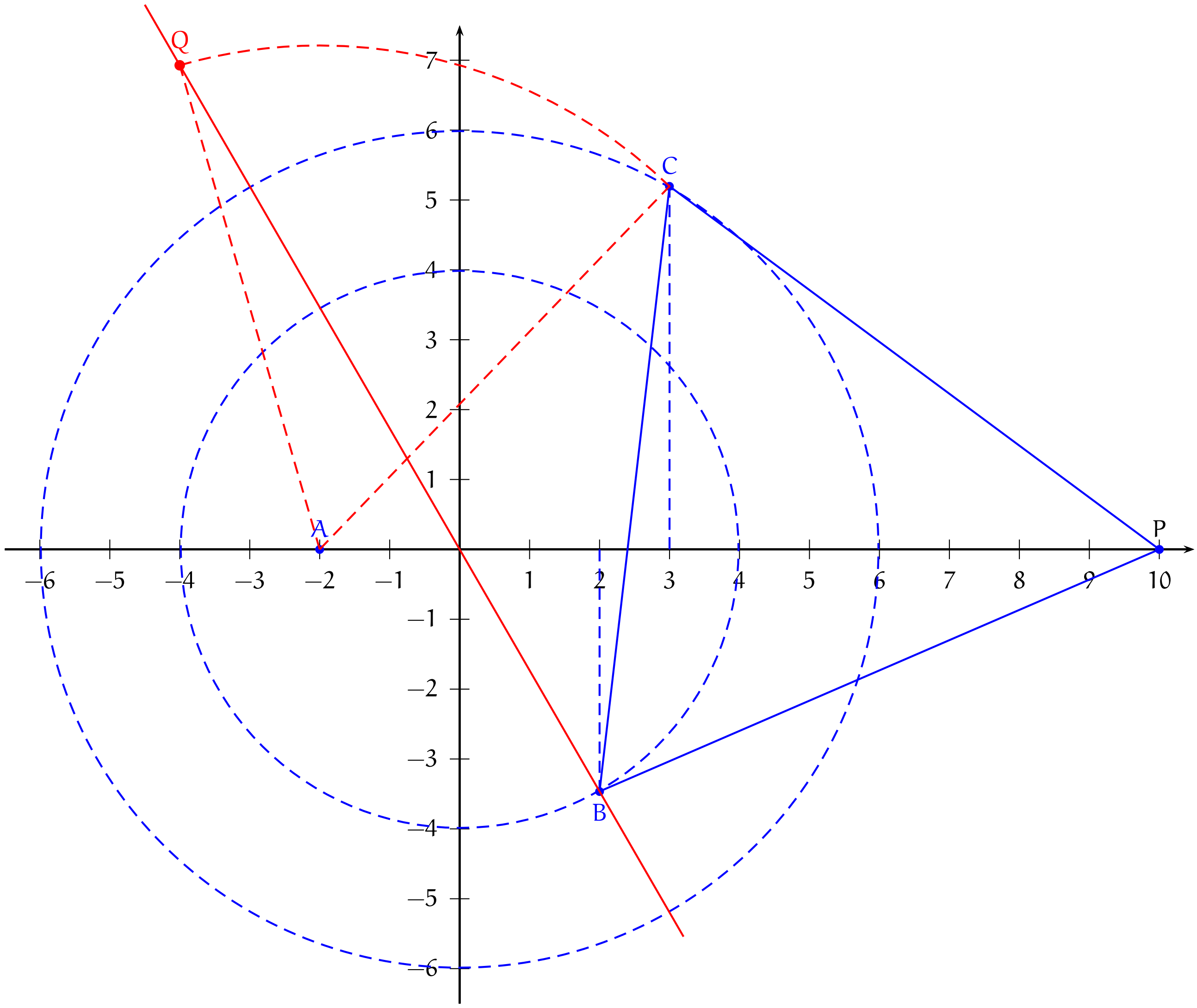
$$
\begin{aligned}
q &= a + e^{i\pi/3}(c-a) = a + \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(c-a)\\
&= -2 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + 3i\sqrt{3} + 2) = -2 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(5 + 3i\sqrt{3}\right)\\
&= -2 + \frac{5}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} = -2 - \frac{4}{2} + i\frac{8\sqrt{3}}{2}\\
&= -4 + 4i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{q = -4 + 4i\sqrt{3}.}$$

b) On a encore $q = -2(2 - 2i\sqrt{3}) = -2b$ ou aussi $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points O, B et Q sont alignés.}}$$



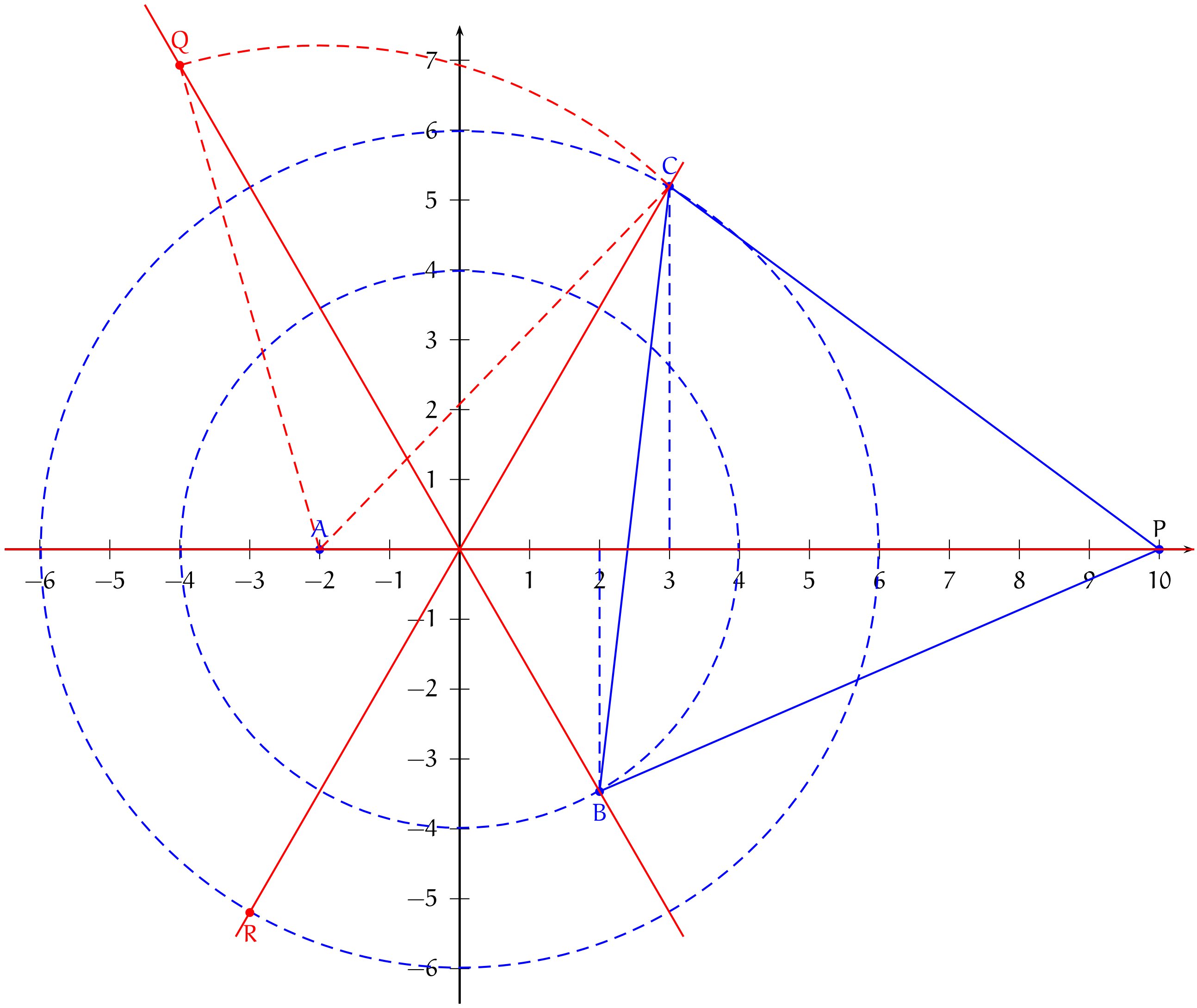
4) a) • Les points A et P sont sur l'axe des abscisses de même que le point O. Donc le point O appartient à la droite (AP).

• D'après la question précédente, le point O appartient à la droite (BQ).

• Puisque R est le symétrique de C par rapport à O, le point O est le milieu du segment $[CR]$ et en particulier, le point O appartient à la droite (CR).

On a montré que

$$\boxed{\text{Les droites } (AP),\ (BQ) \text{ et } (CR) \text{ sont concourantes en } O.}$$



b) • $AP = |p - a| = 12$,

• $BQ = |q - b| = \left|\left(-4 + 4i\sqrt{3}\right) - \left(2 - 2i\sqrt{3}\right)\right| = |-6 + 6i\sqrt{3}| = 6\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 12$,

• $CR = 2OC = 2|c| = 12$ (d'après la question 1)b).

Donc,

$$\boxed{AP = BQ = CR = 12.}$$

PARTIE B

1) D'après la question 1)b) de la partie A, $f(O) = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 2 + 4 + 6 = 12$.

$$\boxed{f(O) = 12.}$$

2) Soit M un point du plan. Si $M = A$, alors $N = A$ et donc $AM = MN = 0$. Si $M \neq A$, le triangle AMN est équilatéral et donc $AM = MN$.

Ensuite, puisque $q = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ et $n = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a)$,

$$\begin{aligned} NQ &= |q - n| = \left|\left(a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)\right) - \left(a + e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a)\right)\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}c - e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}(m - a)\right| \\ &= \left|e^{i\pi/3}\right| \times |m - a| = MC. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA = MN \text{ et } MC = NQ.}$$

3) Soit M un point du plan. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f(M) &= MA + MB + MC = MN + MB + NQ = BM + MN + NQ \\ &\geqslant BQ = 12 \text{ (d'après la question A.4)b).)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } f(M) \geqslant 12.}$$

