Centres étrangers 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2

1) Soient z un nombre complexe distinct de -1 puis M le point d'affixe z.

$$M' = M \Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow iz = z^2 + z \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z = 0 \Leftrightarrow z(z+1-i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i.$$

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M' = M \text{ sont les points d'affixes } 0 \text{ et } -1+i.}$$

2) Soit M un point distinct de A et de O. Soit z l'affixe du point M. On a donc $z \neq 0$ et $z \neq a$ et aussi $z' \neq 0$ puis

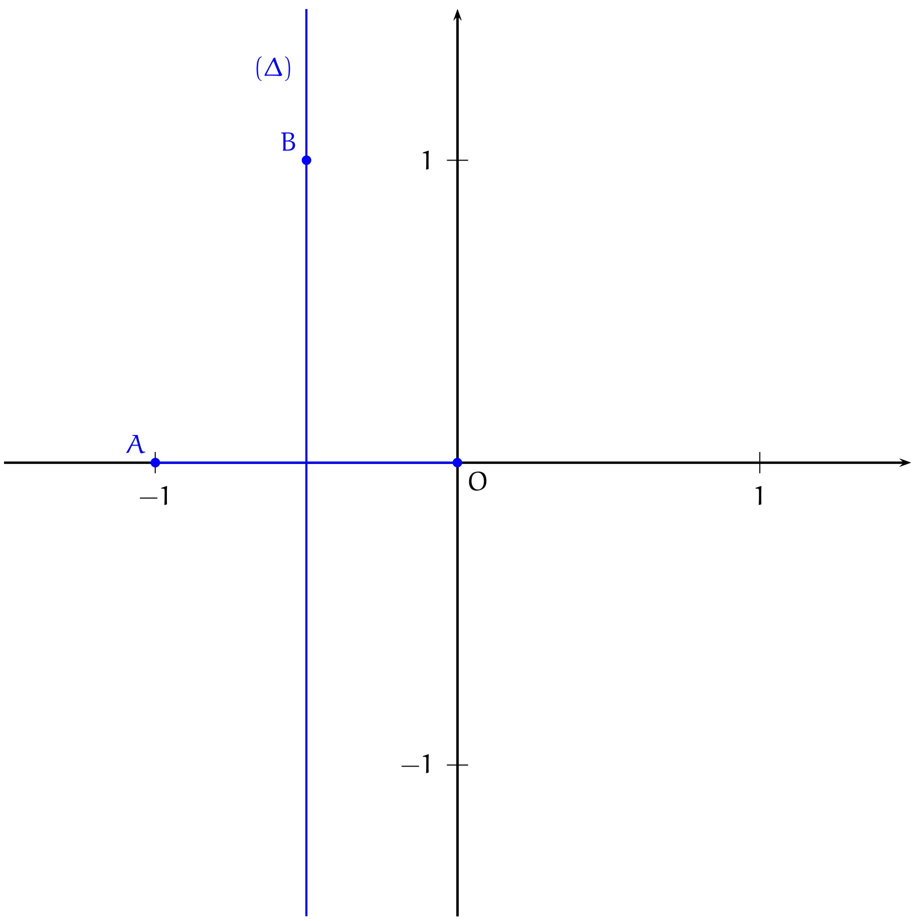
$$OM' = |z'| = \left|\frac{iz}{z+1}\right| = \frac{|i| \times |z|}{|z-a|} = \frac{1 \times OM}{AM} = \frac{OM}{AM},$$

puis

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) &= \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z+1} \times i\right) = \arg(z) - \arg(z-a) + \arg(i) \\
&= \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&= \left(-\overrightarrow{MA}, -\overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&= \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ distinct de } A \text{ et de } O,\ OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi].}$$

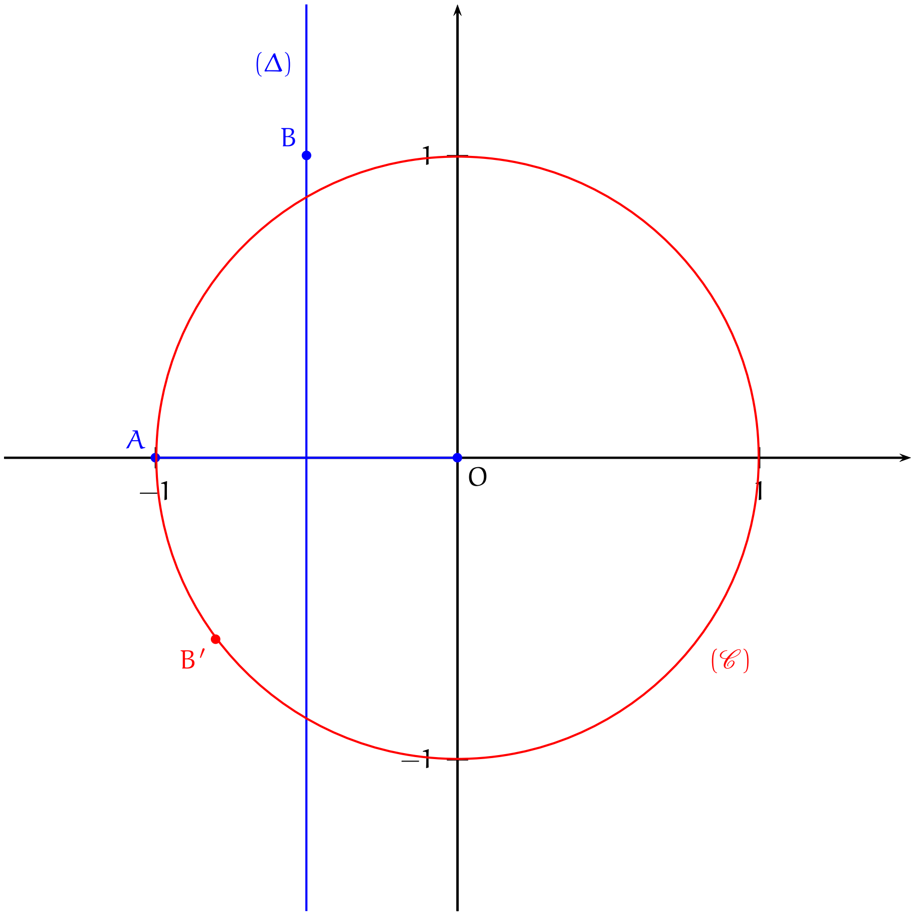
3) a)



b) $b' = \dfrac{i\left(-\dfrac{1}{2}+i\right)}{-\dfrac{1}{2}+i+1} = \dfrac{-1-\dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{2}+i} = \dfrac{-2-i}{1+2i} = \dfrac{(-2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{-2+4i-i-2}{1^2+2^2} = \dfrac{-4+3i}{5}$.

$$\boxed{b' = \frac{-4+3i}{5}.}$$

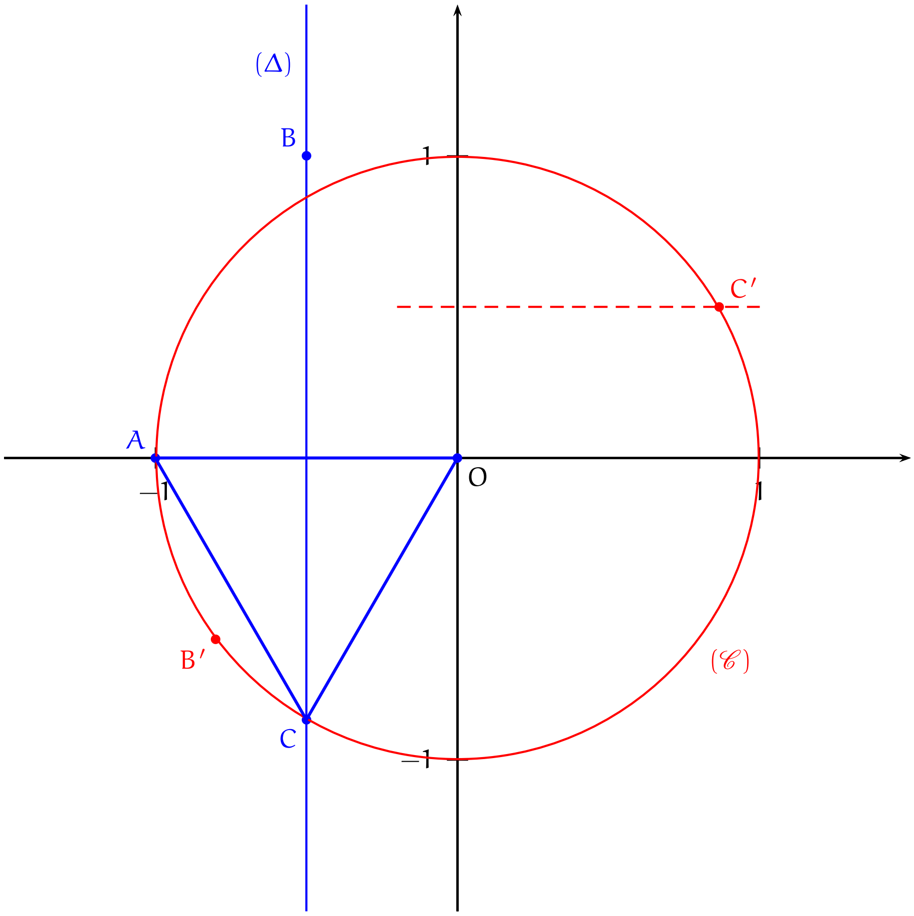
$OB' = |b'| = \dfrac{1}{5}|-4+3i| = \dfrac{1}{5}\sqrt{(-4)^2+3^2} = \dfrac{\sqrt{25}}{5} = 1$ et donc B' appartient au cercle $(\mathscr{C})$.



c) Soit M un point de la médiatrice du segment $[OA]$. Alors, $OM' = \dfrac{OM}{AM} = 1$ et donc M' appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

d) Le point C est à égale distance des points O et A. Donc le point C appartient à la droite (Δ) puis, d'après la question précédente, le point C' appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

D'autre part, d'après la question 2), $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC'}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}\right) + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. On en déduit que le point C' est le point du cercle $(\mathscr{C})$ d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ et d'abscisse strictement positive.



4) a) Soit M un point distinct de O et de A.

$$z' = \frac{iz}{z+1} = \frac{i(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{-y+ix}{(x+1)+iy} = \frac{(-y+ix)((x+1)-iy)}{((x+1)+iy)((x+1)-iy)}$$
$$= \frac{-y(x+1)+iy^2+ix(x+1)+xy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{-y+i(x^2+y^2+x)}{(x+1)^2+y^2}.$$

Donc $\mathrm{Im}(z') = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$. Par suite,

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \text{ et } \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0) \text{ et } (x,y) \neq (-1,0) \text{ et } x^2+y^2+x = 0.$$

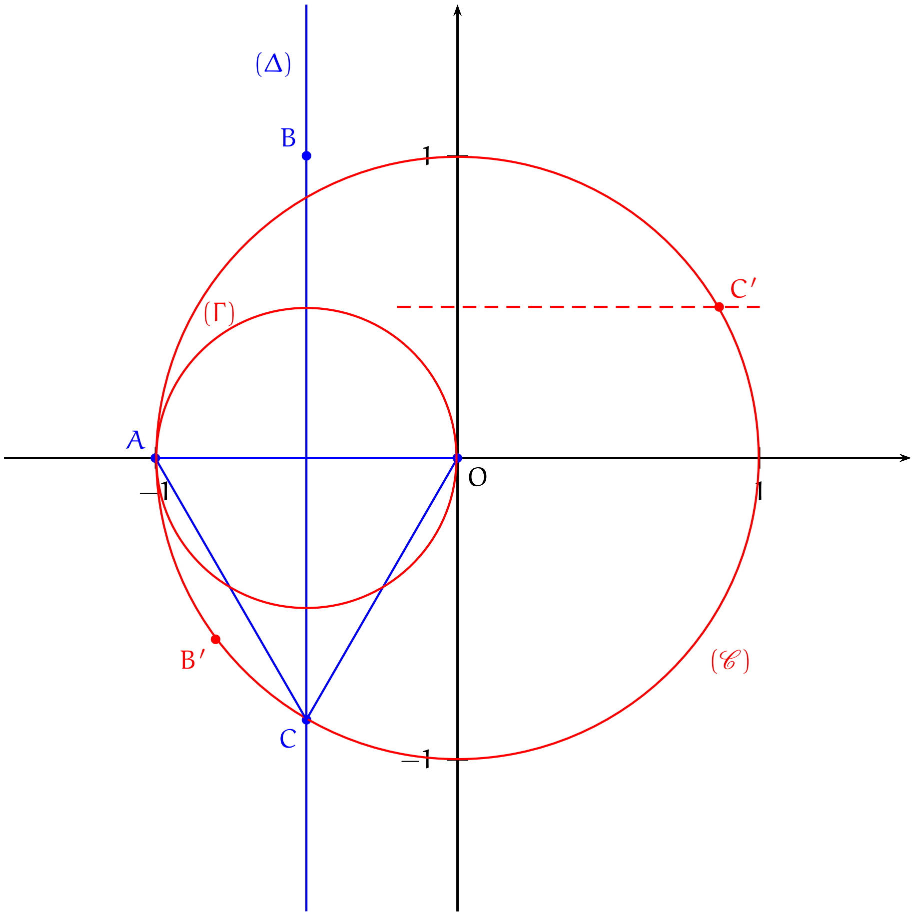
Maintenant, $x^2+y^2+x = 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$. (Γ) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé des points O et A (en notant que les points O et A appartiennent effectivement au cercle d'équation $x^2+y^2+x=0$) ou encore (Γ) est le cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A.

$$\boxed{(\Gamma) \text{ est le cercle de diamètre } [OA] \text{ privé des points } O \text{ et } A.}$$

b) Soit M un point du plan. D'après la question 2,

$$\begin{aligned}
M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} = 0\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } OAM \text{ rectangle en } M \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [OA] \text{ privé de } O \text{ et de } A.
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.


(Δ)
B
1
C′
(Γ)
A
O
−1
1
B′
(𝒞)
C
−1

