

Centres étrangers 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le plan complexe (\mathcal{P}) muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan (\mathcal{P}) dans lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

- 1) Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.
- 2) Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\arg \frac{OM'}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

- 3) a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.

Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment [OA].

- b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f .

Etablir que B' appartient au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle (\mathcal{C}) dans le repère.

- c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle (\mathcal{C}).

- d) Soit C le point tel que le triangle OAC soit équilatéral direct.

En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (on laissera apparent les traits de construction.)

- 4) Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les question a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

- a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

- b) A l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).