

# Centres étrangers 2010. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le plan complexe ( $\mathcal{P}$ ) muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe  $a = -1$  et l'application  $f$ , du plan ( $\mathcal{P}$ ) dans lui-même, qui au point M d'affixe  $z$ , distinct de A, associe le point  $M' = f(M)$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

- 1) Déterminer l'affixe des points M tels que  $M' = M$ .
- 2) Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$\arg \frac{OM'}{AM} \text{ et } \left( \vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \left( \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

- 3) a) Soit B le point d'affixe  $b = -\frac{1}{2} + i$ .

Placer dans le repère le point B et la médiatrice ( $\Delta$ ) du segment [OA].

- b) Calculer sous forme algébrique l'affixe  $b'$  du point B' image du point B par  $f$ .

Etablir que B' appartient au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre O et de rayon 1.

Placer le point B' et tracer le cercle ( $\mathcal{C}$ ) dans le repère.

- c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice ( $\Delta$ ), son image  $M'$  par  $f$  appartient au cercle ( $\mathcal{C}$ ).

- d) Soit C le point tel que le triangle OAC soit équilatéral direct.

En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par  $f$  (on laissera apparent les traits de construction.)

- 4) Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M distincts de A et de O dont l'image  $M'$  par  $f$  appartient à l'axe des abscisses.

Les questions a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

- a) On pose  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels tels que  $(x, y) \neq (-1, 0)$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
Démontrer que la partie imaginaire de  $z'$  est égale à :

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble ( $\Gamma$ ) et le tracer dans le repère.

- b) A l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble ( $\Gamma$ ).

# Centres étrangers 2010. Enseignement spécifique

## EXERCICE 2

1) Soient  $z$  un nombre complexe distinct de  $-1$  puis  $M$  le point d'affixe  $z$ .

$$\begin{aligned} M' = M &\Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow iz = z^2 + z \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z = 0 \Leftrightarrow z(z+1-i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1 + i. \end{aligned}$$

Les points  $M$  tels que  $M' = M$  sont les points d'affixes  $0$  et  $-1 + i$ .

2) Soit  $M$  un point distinct de  $A$  et de  $O$ . Soit  $z$  l'affixe du point  $M$ . On a donc  $z \neq 0$  et  $z \neq a$  et aussi  $z' \neq 0$  puis

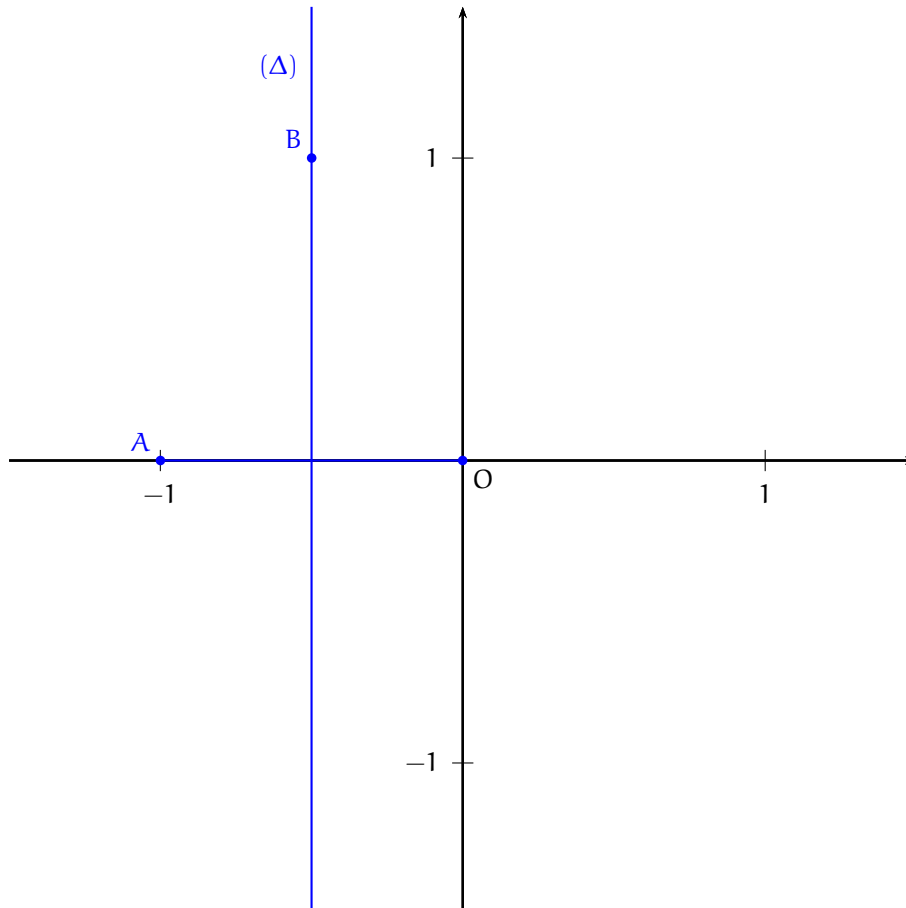
$$OM' = |z'| = \left| \frac{iz}{z+1} \right| = \frac{|i| \times |z|}{|z-a|} = \frac{1 \times OM}{AM} = \frac{OM}{AM},$$

puis

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) &= \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z+1} \times i\right) = \arg(z) - \arg(z-a) + \arg(i) \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{AM}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &= (-\overrightarrow{MA}, -\overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]. \end{aligned}$$

Pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et de  $O$ ,  $OM' = \frac{OM}{AM}$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

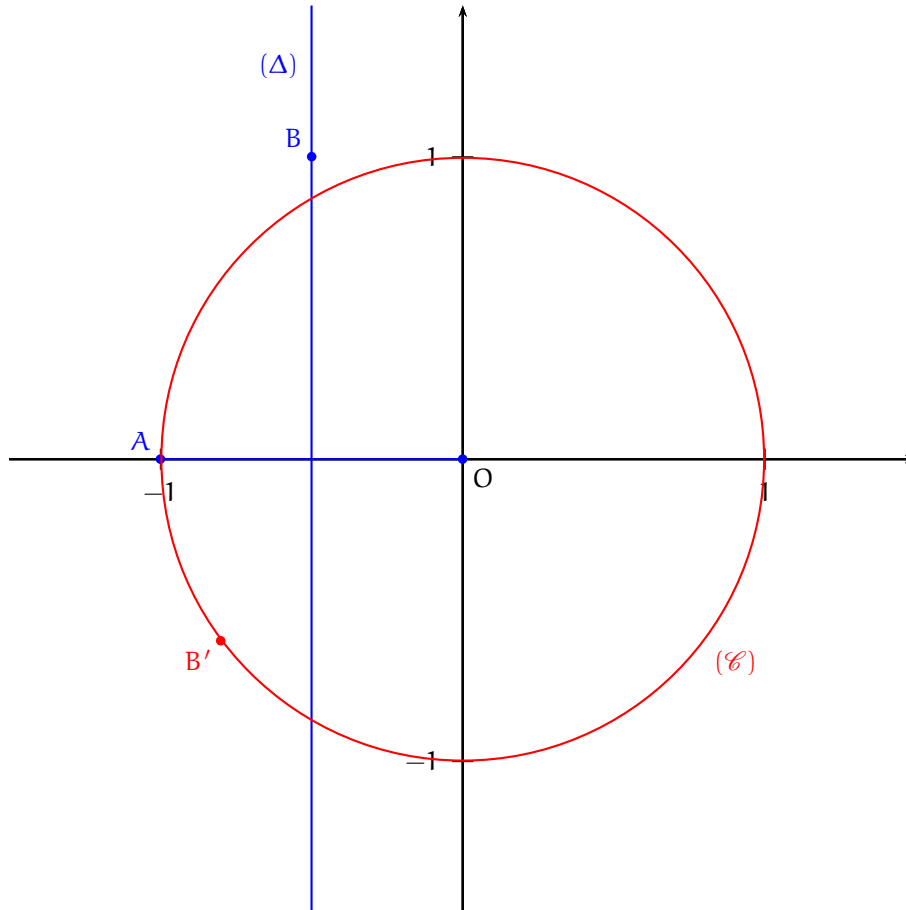
3) a)



$$b) b' = \frac{i\left(-\frac{1}{2} + i\right)}{-\frac{1}{2} + i + 1} = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i} = \frac{-2 - i}{1 + 2i} = \frac{(-2 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-2 + 4i - i - 2}{1^2 + 2^2} = \frac{-4 + 3i}{5}.$$

$$b' = \frac{-4 + 3i}{5}.$$

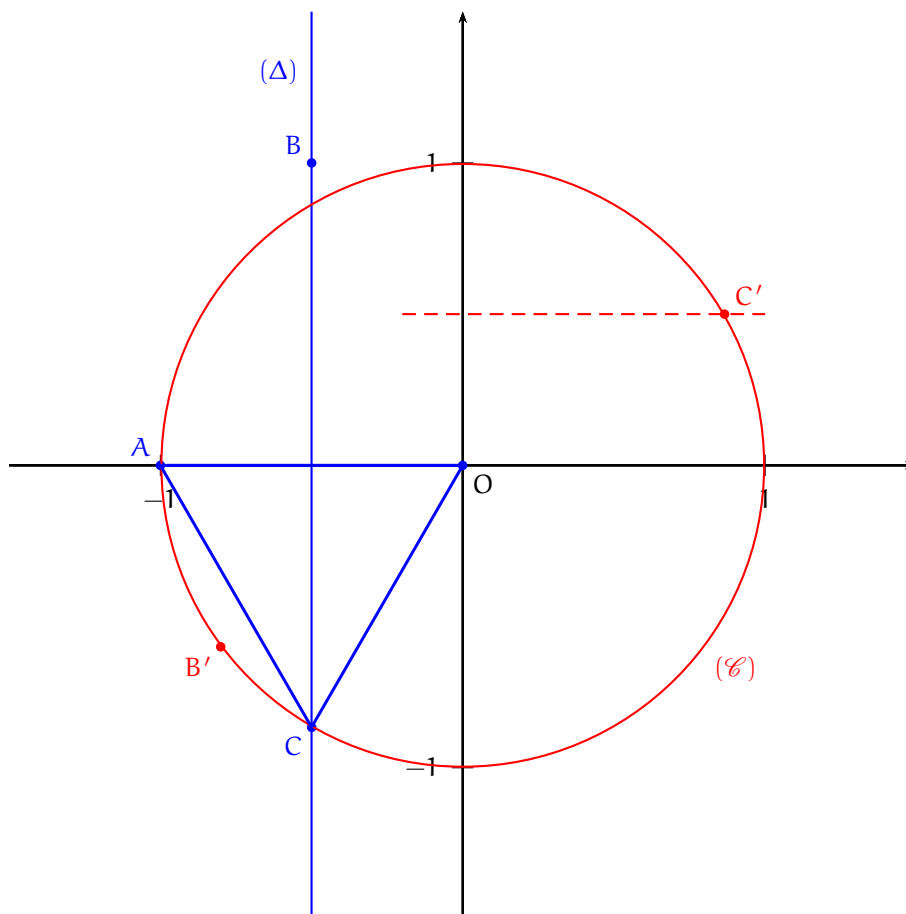
$OB' = |b'| = \frac{1}{5}|-4 + 3i| = \frac{1}{5}\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$  et donc  $B'$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .



c) Soit  $M$  un point de la médiatrice du segment  $[OA]$ . Alors,  $OM' = \frac{OM}{AM} = 1$  et donc  $M'$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .

d) Le point  $C$  est à égale distance des points  $O$  et  $A$ . Donc le point  $C$  appartient à la droite  $(\Delta)$  puis, d'après la question précédente, le point  $C'$  appartient au cercle  $(\mathcal{C})$ .

D'autre part, d'après la question 2),  $(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ . On en déduit que le point  $C'$  est le point du cercle  $(\mathcal{C})$  d'ordonnée  $\frac{1}{2}$  et d'abscisse strictement positive.



4) a) Soit M un point distinct de O et de A.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{iz}{z+1} = \frac{i(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{-y+ix}{(x+1)+iy} = \frac{(-y+ix)((x+1)-iy)}{((x+1)+iy)((x+1)-iy)} \\ &= \frac{-y(x+1)+iy^2+ix(x+1)+xy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{-y+i(x^2+y^2+x)}{(x+1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Donc  $\text{Im}(z') = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$ . Par suite,

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \text{ et } \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } x^2 + y^2 + x = 0.$$

Maintenant,  $x^2 + y^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ . ( $\Gamma$ ) est donc le cercle de centre  $\Omega \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  privé des points O et A (en notant que les points O et A appartiennent effectivement au cercle d'équation  $x^2 + y^2 + x = 0$ ) ou encore ( $\Gamma$ ) est le cercle de diamètre [OA] privé des points O et A.

( $\Gamma$ ) est le cercle de diamètre [OA] privé des points O et A.

b) Soit M un point du plan. D'après la question 2,

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = 0 \text{ } [\pi] \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } OAM \text{ rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [OA] \text{ privé de } O \text{ et de } A. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.

