France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4

1) a)

$$\alpha^2 - 4\alpha + 8 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(1 + i\sqrt{3}\right) + 8 = \left(1 + 2i\sqrt{3} - 3\right) - 4 - 4i\sqrt{3} + 8 = 2 - 2i\sqrt{3}$$
$$= 2\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 2\overline{\alpha},$$

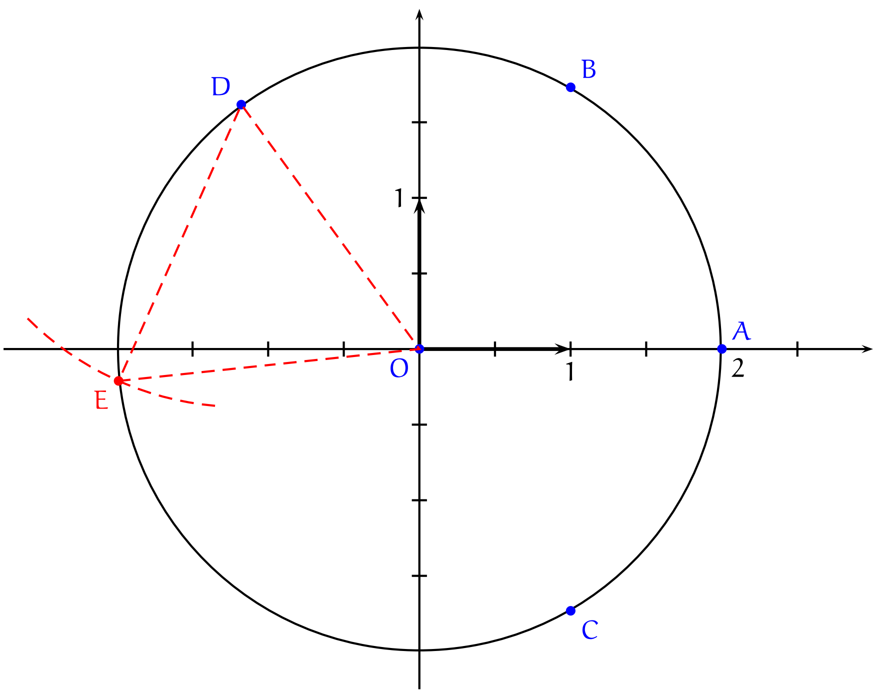
et donc

$$\boxed{\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8.}$$

b) Le cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2.
Or $OB = |\alpha| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ puis $OC = |\overline{\alpha}| = |\alpha| = 2$. Donc

$$\boxed{\text{les points B et C appartiennent au cercle } (\mathscr{C}).}$$

2) a) $|z_E| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| \times |z_D| = |z_D|$ ou encore $OE = OD$. D'autre part, $\arg(z_E) = \arg(z_D) + \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Le point E est donc le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que le triangle ODE soit équilatéral direct.



b) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$.

$$z_E = e^{i\pi/3} z_D = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)e^{i\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\theta} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}.$$

$$\boxed{z_E = \alpha e^{i\theta}.}$$

3) a) $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.}$$

b) Tout d'abord, $F \neq A$. En effet, si le milieu F de la corde $[BD]$ est le point A, en particulier, le milieu F de la corde $[BD]$ est sur le cercle $\mathscr{C}$ ce qui impose $B = D = F \neq A$. Donc, si $F = A$, on obtient une contradiction. Ensuite,

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\overline{\alpha} - 8}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)}$$

$$= \frac{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} \text{ (d'après la question 1)a))}$$

$$= \frac{\alpha(2e^{i\theta} + \alpha - 4)}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}.}$$

c)

$$\arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \arg(z_G - z_A) - \arg(z_F - z_G) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AG}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AF}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AG}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) \ [2\pi].$$

d) $\dfrac{AG}{AF} = \dfrac{|z_G - 2|}{|z_F - 2|} = \left|\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = \dfrac{|\alpha|}{2} = \dfrac{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1.$

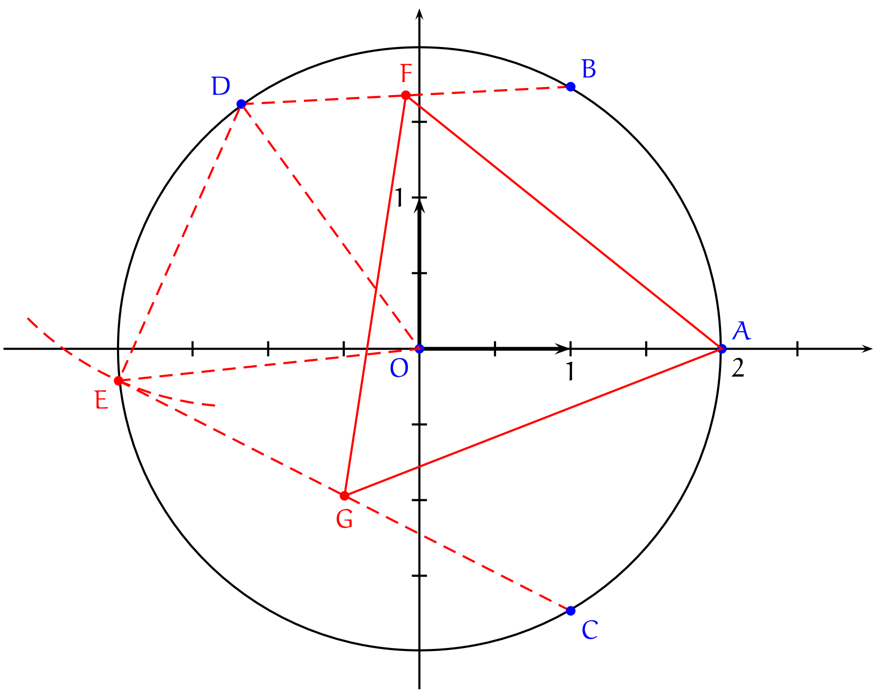
Donc, $AG = AF$ et le triangle AFG est isocèle en A. De plus,

$$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arg\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

En résumé, le triangle AFG est isocèle en A et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } AFG \text{ est équilatéral.}}$$



4) Tout d'abord, AF est minimal si et seulement si AF^2 est minimal avec $AF^2 = f(\theta)$.

Ensuite, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$ et $f(\pi) = 4 - 3(-1) + 0 = 7$ ce qui permet de compléter le tableau de variation.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\nearrow$		$\searrow$	7

Ce tableau de variation montre que la fonction f admet un minimum (ce qui valide la conjecture) en $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et que ce minimum vaut $4-2\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{La valeur minimale de } AF \text{ est } \sqrt{4-2\sqrt{3}}.}$$

