France métropolitaine 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice, on note α le nombre complexe $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2) Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E tel que $z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1) a).

c) Montrer que $\arg\left(\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right)\ [2\pi]$.

d) Déduire des deux questions précédentes que le triangle AFG est équilatéral.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi\,; +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,; +\pi]$.
Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		↘		↗		↘	

ANNEXE 2 (Exercice 4)
(à rendre avec la copie)

(Candidats n'ayant pas suivi L'enseignement de spécialité)